Untersuchungen über Unabhängigkeit und Tragweite der Axiome der Mengenlehre in der Axiomatik Zermelos und Fraenkels.

Inaugural-Dissertation

der

Hohen Philosophischen Fakultät der Universität Marburg

zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Heinrich Vieler

~~aus Marburg.~~

aus Brelé.

Marburg 1926.

Angenommen von der Philosophischen Fakultät Marburg
am 6. Juli 1926.

Referent: Prof. Dr. Fraenkel.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Dieterichsche Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner), Göttingen.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 1

I. Kapitel: Das Axiom der Bestimmtheit.

§ 1. Beweis des Wohlordnungssatzes in der Fraenkelschen Axiomatik . 4

§ 2. Die Unabhängigkeit des Axioms der Bestimmtheit 7

§ 3. Zurückführung des Axioms der Bestimmtheit auf ein einfacheres Axiom 9

II. Kapitel: Das Axiom der Paarung.

§ 1. Der „kleinste Teilbereich“ in der Fraenkelschen Axiomatik . . . 16

§ 2. Beweisbarkeit des Axioms der Paarung in der Fraenkelschen Axiomatik für spezielle Bereiche 19

§ 3. Beweis der Unabhängigkeit des Axioms der Paarung 22

III. Kapitel: Das Axiom der Vereinigung.

§ 1. Beweisbarkeit des Axioms der Vereinigung für den „kleinsten Teilbereich“ 25

§ 2. Beweisbarkeit des Axioms der Paarung und des Axioms der Vereinigung im Bereiche der endlichen Mengen 26

§ 3. Unabhängigkeit des Axioms der Vereinigung in einem weiteren Bereiche 28

IV. Kapitel: Der Unabhängigkeitsbeweis für das Axiom der Potenzmenge . 31

V. Kapitel: Die übrigen Axiome. Schlußbemerkungen 38

Literatur.

Zermelo, E., Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. Math. Annalen, **59**, S. 514 ff. (Zitiert als: Zermelo I.)

Zermelo, E., Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung. Math. Ann., **65**, S. 107 ff., 1908. (Zermelo II.)

Zermelo, E., Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. Math. Ann., **65**, S. 261 ff., 1908. (Zermelo III.)

Fraenkel, A., Einleitung in die Mengenlehre. Berlin 1923. II. Aufl. (Zitiert als: Mengenlehre.)

Fraenkel, A., Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre. Math. Ann., **86**, S. 230 ff., 1922. (Fraenkel I.)

Fraenkel, A., Über den Begriff „definit" und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch., Berlin, Physik.-Math. Klasse, S. 253 ff., 1922. (Fraenkel II.)

Fraenkel, A., Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. Mathemat. Zeitschr., **22**, S. 250 ff., 1924. (Fraenkel III.)

Fraenkel, A., Axiomatische Theorie der geordneten Mengen. Journal f. reine u. angew. Math., **135**, S. 129 ff., 1926. (Fraenkel IV.)

Tarski, A., Sur les ensembles finis. Fundamenta Mathematicae, 1924, VI, S. 45 ff.

Einleitung.

Von den verschiedenen Axiomensystemen, die für die Mengenlehre aufgestellt worden sind[1]), seitdem sich die von Cantor benutzte genetische Begründung der Mengenlehre als nicht widerspruchsfrei erwiesen hatte, erscheint heute das von Zermelo aufgestellte, späterhin von Fraenkel modifizierte Axiomensystem[2]) als das fruchtbarste und weitesttragende. Es kann nach diesen Untersuchungen als gesichert gelten, daß sich aus diesem Axiomensystem alle wesentlichen Ergebnisse Cantors herleiten lassen[3]), während andrerseits alle bisher aufgezeigten Widersprüche, welche sich auf dem von Cantor eingeschlagenen Wege ergeben hatten, durch das Axiomensystem ausgeschlossen werden[4]). Damit ist allerdings noch nicht gesagt, daß sich aus den Axiomen überhaupt keine Widersprüche herleiten lassen. Vielleicht gelingt es in absehbarer Zeit, auf dem von Hilbert gegenwärtig eingeschlagenen Wege[5]) einen vollständigen Beweis für die Widerspruchsfreiheit des Zermelo-Fraenkelschen Axiomensystems zu geben. Für die vorliegende Arbeit soll jedoch auf diese Frage nicht weiter eingegangen werden. Wir wollen vielmehr auf Grund der Tatsache, daß bisher Widersprüche in dem Axiomensystem nicht aufgezeigt werden konnten, für das Folgende stets voraussetzen, daß die sich aus den Axiomen Zermelos bezw. Fraenkels ergebenden Teile der Mengenlehre widerspruchsfrei sind. Unter dieser Annahme

---

1) Andere Axiomensysteme geben z. B.: Schoenflies, A., Zur Axiomatik der Mengenlehre, Math. Ann., 83, S. 173 ff.; Bemerkungen zur Axiomatik der Größen und Mengen, Math. Ann., 85, S. 60 ff. (Eine eingehende Kritik findet das Schoenfliessche System in der Marburger Dissertation von Merzbach, 1924.) Ferner: J. v. Neumann, Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, Journal f. Math., 154, 1925, S. 219 ff.

2) Zermelo, III; Fraenkel, II u. III, sowie Mengenlehre, S. 189 ff.

3) Zermelo, III; Fraenkel, III u. IV.

4) Vgl. Mengenlehre, S. 214.

5) Vgl. Mengenlehre, S. 235 ff.; daselbst auch Literaturangaben.

dürfen dann auch die im Folgenden benutzten speziellen Teilgebiete der allgemeinen Mengenlehre als widerspruchsfrei gelten.

Die vorliegende Arbeit behandelt im wesentlichen die Frage nach der Unabhängigkeit der einzelnen Axiome [1]) sowie einige damit zusammenhängende Probleme. Der Sinn einer solchen Untersuchung ist eine doppelter: Erstens das Axiomensystem daraufhin zu prüfen, ob es die größte erreichbare Einfachheit besitzt, d. h. namentlich, ob keiner der als Axiome aufgestellten Sätze entbehrlich ist; zweitens festzustellen, wie weit die Bedeutung der einzelnen Axiome geht, bezw. ob es Teilgebiete der Mengenlehre gibt, in denen eins oder mehrere der Axiome entbehrt werden können.

Die im Folgenden benutzte Methode zum Beweise der Unabhängigkeit der einzelnen Axiome ist die seit Hilbert [2]) üblich gewordene. Es wird ein spezielles System von Mengen aufgezeigt, in dem bis auf ein einziges alle Axiome erfüllt sind. Existiert ein solches spezielles System, so ist klar, daß das einzelne Axiom, welches in dem betrachteten Bereiche nicht erfüllt ist, nicht auf Grund deduktiver Schlüsse aus den übrigen Axiomen hergeleitet werden kann.

Über den Inhalt der vorliegenden Arbeit mögen noch einige Bemerkungen vorangeschickt werden: Das I. Kapitel bringt zunächst eine Modifikation des zweiten Zermeloschen Beweises für den Wohlordnungssatz [3]) auf Grundlage des Fraenkelschen Axiomensystems; der Unterschied gegen den von Zermelo gegebenen Beweis beruht dabei auf der Anwendung des Aussonderungsaxioms in der verschärften Fraenkelschen Fassung [4]) unter Vermeidung des Begriffes „definit". Der Wohlordnungssatz gibt dann die Möglichkeit, mit Hilfe des Systems der geordneten Mengen die Unabhängigkeit des

1) Hinweise auf die Erledigung dieser Frage finden sich bei Fraenkel, Mengenlehre, S. 223 ff., ferner ausgeführte Unabhängigkeitsbeweise für die Axiome der Aussonderung und der Auswahl in Fraenkel, I u. II.

Der Vollständigkeit halber sei noch auf zwei kurze Notizen verwiesen, in denen die Frage der Unabhängigkeit der Axiome erwähnt wird: Bericht über einen Vortrag von N. J. Lennes in dem Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 28, S. 300; ferner über einen Vortrag von C. Kuratowski in dem Compte-rendu des séances de la Société polonaise de Mathématique, Section de Varsovie, 15. II. 1924. Weitergehende Veröffentlichungen liegen hierüber nicht vor.

2) Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie, 1899, Kap. II.

3) Zermelo, II.

4) Fraenkel, III.

Axioms der Bestimmtheit von den übrigen Axiomen nachzuweisen. In einem weiteren Paragraphen wird die Bedeutung des Axioms der Bestimmtheit eingehend erörtert, wobei sich zeigt, daß es nicht durch eine Definition der Relation der Gleichheit ersetzt werden kann, daß es jedoch mit Hilfe einer solchen auf eine einfachere Forderung reduziert wird. Das II. Kapitel bringt zunächst eine Betrachtung des „kleinsten Teilbereiches" der Mengenlehre[1]). Auf Grund der gewonnenen Ergebnisse läßt sich dann in einfacher Weise zeigen, daß innerhalb der Fraenkelschen Axiomatik das Axiom der Paarung für weite Gebiete der Mengenlehre entbehrt werden kann, während im Zermeloschen System und auch für das Fraenkelsche System, falls dieses nicht weiter eingeschränkt wird, seine Unabhängigkeit von den übrigen Axiomen folgt. Die Ergebnisse des III. Kapitels sind denen des zweiten größtenteils analog. Das Axiom der Vereinigung erweist sich in dem kleinsten Teilbereich sowie im Bereich der endlichen Mengen als beweisbar, und zwar gleichzeitig mit dem Axiom der Paarung; dagegen zeigt sich seine Unabhängigkeit in einem weiteren Bereiche. Das IV. Kapitel gibt den Unabhängigkeitsbeweis für das Axiom der Potenzmenge. Die einzige Schwierigkeit des Beweises liegt darin, den Cantorschen Satz, daß die Summe von abzählbar unendlich vielen abzählbar unendlichen Mengen wieder eine abzählbar unendliche Menge ergibt, mit den Mitteln der Axiomatik zu beweisen. Das V. Kapitel endlich faßt die Betrachtung der übrigen Axiome zusammen. Die Unabhängigkeitsbeweise für das Aussonderungs- und das Auswahlaxiom sind von Fraenkel bereits gegeben. Für das Axiom des Unendlichen wird der Beweis der Unabhängigkeit mit Hilfe der Resultate einer Arbeit von A. Tarski: „Sur les ensembles finis" geführt.

---

1) Hierbei wird die Verwendung des Begriffes der „natürlichen Zahl" erforderlich. Für einen Unabhängigkeitsbeweis kann dies ohne Bedenken geschehen. (Vgl. Fraenkel, II.) Die Frage, ob eine gänzliche Vermeidung des Begriffes der natürlichen Zahl beim axiomatischen Aufbau der Mengenlehre überhaupt möglich ist, dürfte z. Zt. noch unentschieden sein. Z. B. geht in den Fraenkelschen Funktionsbegriff, wie er für die verschärfte Fassung des Axioms der Aussonderung erforderlich ist, wie auch in die Zermelosche Fassung des Aussonderungsaxioms mittels des Begriffes einer „definiten" Eigenschaft implizit der Begriff der natürlichen Zahl ein. Man vgl. noch K. Grellings Göttinger Dissertation 1910, wo die Eigenschaften der natürlichen Zahlen aus den Axiomen Zermelos hergeleitet werden.

I. Kapitel: Das Axiom der Bestimmtheit.

§ 1.

Beweis des Wohlordnungssatzes in der Fraenkelschen Axiomatik.

Der Wohlordnungssatz ist von Zermelo unter wesentlicher Zugrundelegung des von ihm in einer späteren Arbeit aufgestellten Axiomensystems bewiesen worden[1]). Der Beweis benutzt namentlich auch das Axiom der Aussonderung und den in ihm enthaltenen Begriff einer definiten Eigenschaft. Eine einwandfreie Klarstellung des Begriffes „definit" ist inzwischen erfolgt durch eine schärfere Fassung des Axioms der Aussonderung[2]), wobei sich gleichzeitig zeigte, daß mit der neuen Formulierung des Axioms der Aussonderung die von Zermelo gewonnenen allgemeinen Sätze gleichfalls bewiesen werden können[3]). Eine Anwendung auf den Zermeloschen Beweis des Wohlordnungssatzes soll im Folgenden gegeben werden[4]).

Zunächst werde ein Hilfssatz bewiesen:

Hilfssatz: Ist m irgendeine Menge, so existiert eine Teilmenge t von m, die alle und nur die Elemente y von m enthält, welche zu jeder ihrer Teilmengen η ($= y$ („η Teilmenge von y") den zugehörigen Durchschnitt $\mathfrak{D}\eta$ als Element enthalten.

Beweis: Wir denken uns zunächst ein festes Element y von m gewählt und lassen η die Elemente der Potenzmenge von y, die wir mit n bezeichnen wollen, durchlaufen. $\mathfrak{D}\eta$, der Durchschnitt aller Elemente von η, ist nach Fraenkel, III, § 2 bei variablem η eine Funktion von η. Wir bilden nun nach dem Axiom der Aussonderung diejenige Teilmenge n' von n, für deren Elemente η die Beziehung $\mathfrak{D}\eta\,\varepsilon\,y$ gilt. In der Fraenkelschen Bezeichnungsweise: $n' = n_{\mathfrak{D}\eta\varepsilon y}$[5]). Für ein festgewähltes y ist n' eine ganz bestimmte

---

1) Zermelo, II.

2) Fraenkel, II.

3) Fraenkel, III.

4) Die allgemeine Begründung der Theorie der Wohlordnung wird in der Fortsetzung von Fraenkel, IV, gegeben werden.

5) Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei Funktionen, so wird nach Fraenkel unter $m_{\varphi(x)\,\varepsilon\,\psi(x)}$ diejenige Teilmenge von m verstanden, die alle und nur die Elemente x von m enthält, für die $\varphi(x)$ Element von $\psi(x)$ ist. In obigem Falle ist $\varphi(x) = \mathfrak{D}x$, dagegen $\psi(x) = y$ eine konstante Menge.

Menge, die event. auch die Nullmenge sein kann. Lassen wir y variabel, so ist n' eine Funktion von y. Ist nun die Beziehung $\mathfrak{D}\eta\varepsilon y$ für alle Teilmengen η von y oder, was dasselbe besagt, für alle Elemente η von n erfüllt, so ist offenbar $n' = n$. Dabei sind n und n' lediglich Funktionen von y. Für jedes Element y von m ist nun entweder $n' = n$ oder $n' \neq n$. Wir können daher die Teilmenge t von m bilden, für deren Elemente $n' = n$ gilt; in unserer Schreibweise: $t = m_{n'=n}$. Jedes Element τ von t ist dann so beschaffen, daß zu jeder Teilmenge $\tau' \subset \tau$ der Durchschnitt $\mathfrak{D}\tau'$ Element von τ ist. t ist also die Menge, deren Existenz der Hilfssatz behauptet.

Weiter wollen wir jetzt die Menge M, mit deren Hilfe Zermelo a. a. O. die Wohlordnung der gegebenen Menge M erreicht, bilden. Zunächst existiert nach dem allgemeinen Auswahlprinzip[1]) zur Potenzmenge von M eine Auswahlmenge, d. h. eine solche Menge, die jedem Elemente μ von $\mathfrak{U}M - \{0\}$ eindeutig ein Element von μ zuordnet. Sind M und $\mathfrak{U}M$ elementefremd, so kann man diesen Tatbestand auch so ausdrücken: Es existiert eine Menge P von lauter Paarmengen derart, daß

a) jedes Element von P genau ein Element μ von $\mathfrak{U}M$ und genau ein Element a von μ als Elemente enthält, aber keine weiteren Elemente besitzt;

b) niemals zwei verschiedene Elemente von P ein und dasselbe Element μ von $\mathfrak{U}M$ als Element besitzen;

c) mit Ausnahme der Nullmenge jedes Element von $\mathfrak{U}M$ als Element eines Elementes von P vorkommt.

Wir nennen a das ausgezeichnete Element von μ und können dann a als Funktion von μ betrachten. Ist nämlich p_μ dasjenige Element von P, welches μ als Element enthält, so ist $p_\mu = \mathfrak{S}P_{\mu\varepsilon y}$, wo y die Elemente von P durchläuft. p_μ ist also eine Funktion von μ, und daher ist $a = \mathfrak{S}M_{x\varepsilon p_\mu}$, wo x die Elemente von M durchläuft, ebenfalls eine Funktion von μ. Wir setzen demgemäß: $a = \varphi(\mu)$. Dann geht durch φ aus jedem Elemente von $\mathfrak{U}M$ sein ausgezeichnetes Element hervor.

Sind nun M und $\mathfrak{U}M$ nicht elementefremd, so kann man stets eine dritte Menge finden, welche zu M und $\mathfrak{U}M$ elementefremd ist und die gewünschte Zuordnung leistet (Fraenkel, a. a. O.). Die Bestimmung von a als Funktion von μ wird dann ebenfalls möglich, ganz analog der obigen Betrachtung.

---

1) Fraenkel, III, § 3, Nr. 21.

Zermelo definiert weiterhin (a. a. O.) eine zur Menge M gehörige Θ-Kette als Teilmenge der Potenzmenge $\mathfrak{U}M$ durch folgende drei Eigenschaften:

1) Θ enthält M als Element.

2) Ist μ Element von Θ, so soll auch $\mu' = \mu - \{\varphi(\mu)\}$ Element von Θ sein, wobei φ die oben näher definierte „Auswahlfunktion" ist.

3) Ist A eine beliebige Teilmenge von Θ, so ist auch $\mathfrak{D}A$, der Durchschnitt aller Elemente von A, Element von Θ.

Zunächst soll die Existenz der Menge T, der Menge aller Θ-Ketten, bewiesen werden. T ist diejenige Menge, welche alle Teilmengen von $\mathfrak{U}M$ enthält, denen die Eigenschaften 1), 2) und 3) zukommen. T ist also Teilmenge von $\mathfrak{U}\mathfrak{U}M$. Zur Abkürzung werde $\mathfrak{U}M = U$ und $\mathfrak{U}\mathfrak{U}M = \overline{U}$ gesetzt.

Um der Bedingung 1) zu genügen, bilden wir diejenige Teilmenge von $\overline{U}$, deren Elemente M als Element enthalten; diese Teilmenge möge mit $\overline{U}(M)$ bezeichnet werden. Dann ist $\overline{U}(M) = \overline{U}_{M \varepsilon y}$, wobei y die Elemente von $\overline{U}$ durchläuft. $\overline{U}(M)$ ist bei gegebenem M eine bestimmte konstante Menge.

Jetzt werde die Teilmenge R von $\overline{U}(M)$ gebildet, deren Elemente $\Theta = y$ sämtlich die Eigenschaft 2) besitzen. Lassen wir y die Elemente von $\overline{U}(M)$ und μ die Elemente von y durchlaufen, so soll R alle und nur die Elemente y enthalten, die $\mu' = \mu - \{\varphi(\mu)\}$ als Element enthalten, falls μ Element von y ist. Nehmen wir zunächst ein bestimmtes y, so ist $y' = y_{\mu - \{\varphi(\mu)\} \varepsilon y}$ diejenige Teilmenge von y, für deren Elemente μ stets $\mu' = \mu - \{\varphi(\mu)\}$ gleichzeitig mit μ Element von y ist. Läßt man y jetzt variabel, so ist y' eine Funktion von y. Ist die Bedingung $\mu - \{\varphi(\mu)\} = \mu' \varepsilon y$ für alle Elemente μ von y erfüllt, so ist offenbar $y' = y$. Dann ist aber $R = \overline{U}(M)_{y' = y}$ die Teilmenge derjenigen Elemente von $\overline{U}(M)$, die der Bedingung 2) genügen.

Um aus R die Teilmenge T zu bilden, deren Elemente sämtlich noch der Bedingung 3) genügen, benutzen wir den Hilfssatz. Setzen wir darin R statt m, Θ statt y, A statt η, endlich T statt t, so existiert die Teilmenge $\underline{\mathsf{T}}$ von R, deren Elemente Θ zu jeder Teilmenge A (Θ den Durchschnitt $\mathfrak{D}A$ als Element enthalten.

T ist die Menge aller Teilmengen von $\mathfrak{U}M$, die den Bedingungen 1), 2) und 3) genügen. T ist nicht leer; sie enthält z. B. die Menge $\mathfrak{U}M$, da diese die Bedingungen erfüllt. Bilden wir schließlich noch den Durchschnitt aller Elemente von T: $\mathsf{M} = \mathfrak{D}\mathsf{T}$, so ist M die von Zermelo zum Beweis der Wohlordnungsfähigkeit der Menge

M benutzte Menge. M ist nicht leer; denn jede Θ-Kette enthält wegen der Bedingung 1) M als Element, damit aber wegen der Bedingung 2) auch $M' = M - \{\varphi(M)\}$ usw. M ist übrigens seiner Bildung nach vollkommen eindeutig bestimmt, da sowohl T als auch $\mathfrak{D}\mathsf{T}$ nach ihrer Bildungsweise ganz bestimmte Mengen darstellen, deren Struktur nur von der festgewählten „Auswahlmenge“ P und der gegebenen Menge M abhängt.

Die weiteren Teile des Beweises können wörtlich im Anschluß an Zermelo, II, geführt werden.

§ 2.

Die Unabhängigkeit des Axioms der Bestimmtheit.

Die Unabhängigkeit des Axioms der Bestimmtheit ist erwiesen, wenn es gelingt, ein System von Mengen zu finden, welches den beiden Bedingungen genügt, daß

1) die Axiome II bis VII innerhalb des Systems erfüllt sind[1]),

2) das Axiom der Bestimmtheit in dem betrachteten System keine Gültigkeit besitzt.

Wie schon Fraenkel[2]) ohne nähere Ausführung angibt, bilden die geordneten Mengen ein solches System, mit dessen Hilfe sich der Unabhängigkeitsbeweis für das Axiom der Bestimmtheit erbringen läßt.

Genügt nun das System der geordneten Mengen den oben formulierten beiden Bedingungen?

Bezüglich der ersten Bedingung läßt sich die Frage mit Hilfe des Wohlordnungssatzes beantworten. Dieser sagt aus, daß jede Menge wohlgeordnet, also auch sicherlich geordnet werden kann. Wenn nun M irgendeine Menge bedeutet, und $\overline{M}$ eine mit Hilfe eines der Axiome III bis VI daraus hervorgehende Menge ist, so läßt sich $\overline{M}$ ordnen. Dasselbe gilt auch von der Paarmenge, die aus irgend zwei Mengen nach Axiom II gebildet wird, und ferner für jede nach Axiom VII existierende Menge Z. Bezüglich der Potenzmenge ist noch zu bemerken, daß bei Deutung des Begriffes „Menge“ als „geordnete Menge“ zu einer Menge im allgemeinen verschiedene Teilmengen existieren, welche dieselben Elemente enthalten, wenigstens dann, wenn wir an der üblichen Definition der Teilmenge festhalten. So hat z. B. die geordnete Menge $\{a, b\}$, wo die Art der Anordnung durch die Reihenfolge in der Schreibweise

---

1) Die Numerierung der Axiome ist im Folgenden nach Fraenkel, Mengenlehre, § 13, gewählt.

2) Mengenlehre, S. 225.

ausgedrückt sein soll, u. a. die beiden Mengen $\{a, b\}$ und $\{b, a\}$ als Teilmengen, während im Bereich der allgemeinen Mengenlehre $\{a, b\}$ und $\{b, a\}$ mit einander identisch sind. Die Potenzmenge als Menge aller Teilmengen enthält somit hier im Bereich der geordneten Mengen zu jeder Teilmenge auch noch alle diejenigen Teilmengen als Element, die durch irgendeine Änderung der Anordnung daraus hervorgehen. Es ist aber stets sicher, daß die so definierte Potenzmenge auf Grund der Axiome existiert. Denn in der allgemeinen Mengenlehre läßt sich jede Ordnung einer Menge M durch eine Teilmenge M von $\mathfrak{U}M$ definieren[1]). Ist also T irgendeine Teilmenge von M, so ist jede geordnete Menge mit denselben Elementen wie T durch eine ganz bestimmte Teilmenge T von $\mathfrak{U}T$ definiert. T ist aber dann gleichzeitig Teilmenge von $\mathfrak{U}M$. Alle Ordnungen aller Teilmengen von M sind daher durch gewisse Elemente von $\mathfrak{U}\mathfrak{U}M$ dargestellt, und diese bilden zusammen eine Teilmenge von $\mathfrak{U}\mathfrak{U}M$. Damit ist aber die Existenz der Menge aller geordneten Teilmengen von M gewährleistet.

Wir beschränken uns jetzt auf die Betrachtung geordneter Mengen. Aus den vorhergehenden Ausführungen folgt dann, daß,

a) falls irgend zwei verschiedene (geordnete) Mengen gegeben sind, eine geordnete Menge existiert, die die beiden gegebenen Mengen als Elemente enthält, aber keine weitere Elemente besitzt;

b) falls irgendeine (geordnete) Menge gegeben ist, eine geordnete Menge existiert, die die Elemente der Elemente der gegebenen Menge als Elemente enthält, aber keine weiteren Elemente besitzt;

c) falls irgendeine (geordnete) Menge gegeben ist, eine geordnete Menge existiert, die die sämtlichen (geordneten) Teilmengen der gegebenen Menge als Elemente enthält, aber keine weiteren Elemente besitzt;

d) falls irgendeine (geordnete) Menge und eine definite Eigenschaft $\mathfrak{E}$ gegeben ist, eine geordnete Menge existiert, die alle diejenigen Elemente der gegebenen Menge, denen die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ zukommt, enthält, aber keine weiteren Elemente besitzt[2]);

e) falls irgendeine (geordnete) Menge, unter deren paarweise elementefremden Elementen die Nullmenge nicht vorkommt, gegeben ist, eine geordnete Menge existiert, die von jedem Element der gegebenen Menge genau ein Element als Element enthält, aber keine weiteren Elemente besitzt;

1) Vgl. Fraenkel, IV.

2) Entsprechendes gilt für die Fraenkelsche Fassung des Aussonderungsaxioms ohne den Begriff „definit“.

f) eine geordnete Menge existiert, die die Nullmenge als Element enthält und außerdem zu jedem ihrer Elemente a ein weiteres Element $\{a\}$ besitzt.

Damit ist nachgewiesen, daß innerhalb des Systems der geordneten Mengen die Axiome II bis VII erfüllt sind. Allerdings sind die nach a) bis f) existierenden Mengen nicht eindeutig bestimmt. Es gibt im allgemeinen zu jeder gegebenen Menge mehrere geordnete Vereinigungsmengen, Potenzmengen usw. Aber die Axiome II bis VII sagen ja auch über die Eindeutigkeit der geforderten Mengen nichts aus. Die Eindeutigkeit der durch die Axiome geforderten Mengen ergibt sich erst mit Hilfe des Axioms der Bestimmtheit.

Dieses Axiom nun ist gerade für die geordneten Mengen nicht erfüllt. Denn eine geordnete Menge ist im allgemeinen, nämlich dann, wenn sie mehr als ein Element enthält, nicht durch ihre Elemente allein völlig bestimmt, wie es Axiom I verlangt, sondern erst dann, wenn von je zweien ihrer Elemente angegeben werden kann, welches von beiden dem andern vorangeht. Setzen wir demgemäß wie üblich fest, daß zwei geordnete Mengen dann als gleich gelten, wenn sowohl jedes Element der einen gleichzeitig Element der andern (und umgekehrt) ist, als auch für jedes Elementenpaar der einen dieselbe Ordnungsbeziehung gilt wie für das gleiche Elementenpaar der andern, so tritt die Unerfülltheit von Axiom I klar hervor.

Das System der geordneten Mengen stellt somit ein spezielles Gebiet von Mengen dar, das — unter Voraussetzung der Widerspruchsfreiheit der axiomatisierten Mengenlehre, aus welcher die Lehre von den geordneten Mengen als spezieller Teil sich herleiten läßt, — widerspruchsfrei ist, und in dem Axiom II bis VII erfüllt, Axiom I nicht erfüllt ist. Es ist daher unmöglich, aus den Axiomen II bis VII durch logische Schlüsse das Axiom der Bestimmtheit herzuleiten.

§ 3.

Zurückführung des Axioms der Bestimmtheit auf ein einfacheres Axiom [1]).

Zermelo leitet seine Axiomatik [2]) mit folgenden Festsetzungen ein: „Die Mengenlehre hat es zu tun mit einem Bereiche $\mathfrak{B}$ von

1) Vgl. dazu Fraenkel, 10 Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre (gehalten an der Universität Kiel, Sommer 1925, in der Sammlung „Wissenschaft und Hypothese“ bei Teubner 1926 erscheinend), 5. u. 6. Vorlesung, Nr. 3 u. 4.

2) Zermelo, III.

Objekten, die wir einfach als Dinge bezeichnen wollen, unter denen die 'Mengen' einen Teil bilden.

(A) Sollen zwei Symbole a und b dasselbe Ding bezeichnen, so schreiben wir $a = b$".

Es ist klar, daß erst diese Festsetzung (A) über die Bedeutung des Gleichheitszeichens in der Mengenlehre dem Axiom der Bestimmtheit einen prägnanten Sinn gibt. Das Axiom lautet ja bei Zermelo:

(B) „Ist jedes Element einer Menge M gleichzeitig Element einer Menge N und umgekehrt, so ist $M = N$".

Dieser als Axiom I ausgesprochene Satz bedeutet ohne die Festsetzung (A) lediglich eine Definition des Gleichheitszeichens, und es steht keineswegs von vornherein fest, ob die nach (B) definierte Relation „gleich" die im Satz (A) ausgesprochene Eigenschaft besitzt, d. h. ob $M = N$ wirklich die Identität der Mengen M und N aussagt.

Wir fragen zunächst: Welche Eigenschaften muß die Relation „gleich" im Satz (B) besitzen, damit die Beziehung $M = N$ wirklich die Identität der Mengen M und N besagt? Dazu ist nach der Natur des mathematischen Gleichheitsbegriffes jedenfalls notwendig, daß die Relation „gleich" außer den üblichen drei Eigenschaften der Reflexivität, der Symmetrie und der Transitivität noch die Eigenschaft der Vertretbarkeit besitzt; d. h. es muß aus $M = N$, $a = b$ und $a \varepsilon M$ stets auch $b \varepsilon N$ folgen. Sind diese vier Eigenschaften für die Relation „gleich" erfüllt, so folgt tatsächlich aus $M = N$, daß die Mengen M und N dasselbe Ding bedeuten. Denn jede Aussage der axiomatisierten Mengenlehre kann ja auf die vier Grundbeziehungen[1]): ε, $\bar{\varepsilon}$, $=$, $\neq$ zurückgeführt werden, und es zeigt eine einfache Überlegung sofort, daß in jeder Beziehung $M \mathfrak{r} \overline{M}$ oder $\overline{M} \mathfrak{r} M$, worin $\mathfrak{r}$ irgendeine der vier Grundbeziehungen bedeutet, anstelle von M die Menge N eintreten kann, falls $M = N$ ist.

Denn aus $M = \overline{M}$ und $M = N$ folgt wegen der Symmetrie und Transitivität der Relation „gleich": $N = \overline{M}$;

aus $\overline{M} = M$ und $M = N$ folgt ebenso: $\overline{M} = N$; dasselbe gilt für die Relation $\neq$;

aus $M \varepsilon \overline{M}$ und $M = N$ folgt wegen der Eigenschaft der Vertretbarkeit: $N \varepsilon \overline{M}$;

aus $\overline{M} \varepsilon M$ folgt ebenso: $\overline{M} \varepsilon N$; dasselbe gilt für die Relation $\bar{\varepsilon}$.

---

1) $\bar{\varepsilon}$ steht hier anstelle der sonst üblichen Bezeichnung für die Negation von ε.

Führen wir also mit dem Satze (B) definitorisch die Gleichheitsbeziehung zwischen zwei Mengen ein, und fordern wir gleichzeitig, daß die Relation „gleich“ den oben angeführten vier Eigenschaften genügt, so gilt jede überhaupt für Mengen (innerhalb der aus den Axiomen sich ergebenden Mengenlehre) gültige Aussage auch dann, wenn man die Mengen durch irgendwelche ihnen gleiche Mengen ersetzt. Das heißt aber: gleiche Mengen sind dann für unsere Betrachtungsweise auf keine Weise mehr unterscheidbar, sie sind also tatsächlich „identisch“. Die Voraussetzung dafür ist, wie nochmals ausdrücklich betont sei, daß die Relation „gleich“ alle vier genannten Eigenschaften erfüllt.

Bei Zermelo kommen in der axiomatisierten Mengenlehre auch Dinge vor, die keine Mengen sind. Für diese hat eine Definition der Gleichheitsbeziehung durch (B) offenbar keinen Sinn, da sich dieser Satz nur auf Mengen bezieht. Die obigen Betrachtungen lassen sich nicht auf Dinge, die keine Mengen sind, ausdehnen. Die Festsetzung (A) wird in diesem Falle notwendig, falls man nicht alle vier Eigenschaften der Relation „gleich“ axiomatisch einführen will. Es ist bemerkenswert, daß Zermelo eine solche axiomatische Einführung der Relation „gleich“ vermeidet und statt dessen eine inhaltliche Bestimmung, wie sie der Satz (A) darstellt, gibt, obwohl eine solche dem Charakter der axiomatischen Methode, die rein formal vorzugehen hat, nicht entspricht. Würden wir den Satz (B) auch auf Nichtmengen anwenden, so würde folgen, daß alle Dinge, die keine Elemente enthalten (also alle Nichtmengen), einander gleich sind. Dies ist in der Fraenkelschen Axiomatik erfüllt; denn in dieser gibt es nur ein Ding ohne Elemente, nämlich die Nullmenge.

In dem Fraenkelschen Axiomensystem ist es also gestattet, den Satz (B) nicht als Axiom, sondern als eine Definition der Gleichheitsbeziehung aufzufassen. Wir müssen uns nur darüber klar sein, daß damit der Satz, obwohl er wörtlich dasselbe aussagt wie das Zermelosche Axiom der Bestimmtheit, eine wesentlich andere Bedeutung gewinnt. Denn während Zermelo von der Relation „gleich“ auf Grund von (A) voraussetzt, daß sie die für den erwünschten Zweck notwendigen vier Eigenschaften besitzt, können wir bei formaler Definition der Gleichheit doch nur die Eigenschaften als gegeben hinnehmen, die sich aus dieser Definition (eventuell unter Hinzuziehung der Axiome II bis VII) herleiten lassen. Die Eigenschaften, die sich auf diese Weise nicht ergeben, sind dann eben axiomatisch neu einzuführen.

Nun macht die Herleitung der Eigenschaften der Reflexivität,

Symmetrie und Transitivität aus unserer Definition keine Schwierigkeit; für die Eigenschaft der Vertretbarkeit gilt das jedoch nur zum Teil, nämlich für die Aussage: aus $m = n$ und $a \varepsilon m$ folgt $a \varepsilon n$, die als Vertretbarkeit erster Art bezeichnet werde. Die Beweise hierfür seien kurz gegeben:

1) Jedes Element einer Menge m ist Element von m und umgekehrt, also ist $m = m$; d. h. die durch (B) definierte Relation „gleich" besitzt die Eigenschaft der Reflexivität.

2) Ist jedes Element einer Menge m gleichzeitig Element einer Menge n und umgekehrt, so gilt auch: Jedes Element von n ist Element von m und umgekehrt, d. h. aus $m = n$ folgt $n = m$; die Relation „gleich" besitzt also die Eigenschaft der Symmetrie.

3) Ist jedes Element einer Menge m gleichzeitig Element einer Menge n und umgekehrt, sowie jedes Element von n gleichzeitig Element einer Menge p und umgekehrt, so gilt auch: Jedes Element von m ist Element von p und umgekehrt, d. h. aus $m = n$ und $n = p$ folgt $m = p$; die Relation „gleich" besitzt also die Eigenschaft der Transitivität.

4) Ist $m = n$, so ist jedes Element von m gleichzeitig Element von n. Ist also a irgendein Element von m, so ist a auch Element von n, d. h. aus $m = n$ und $a \varepsilon m$ folgt $a \varepsilon n$; die Relation „gleich" besitzt also die Eigenschaft der Vertretbarkeit erster Art.

Dagegen läßt sich die Eigenschaft der Vertretbarkeit zweiter Art, nämlich die Aussage, daß aus $a = b$ und $a \varepsilon m$ stets $b \varepsilon m$ folgt, nicht in entsprechender Art beweisen. Um also mit der Definition der Gleichheit (B) dasselbe erreichen zu können wie mit dem Zermeloschen Axiom der Bestimmtheit, müssen wir diese letzte, nicht beweisbare, bei Zermelo aber implizit vorhandene Forderung axiomatisch einführen:

Axiom der Vertretbarkeit: Ist $a = b$ und $a \varepsilon m$, wobei a, b und m irgendwelche Mengen bedeuten, während die Beziehung $=$ gemäß der Definition (B) aufzufassen ist, so folgt stets $b \varepsilon m$.

Es bedarf noch eines Beweises dafür, daß das Axiom der Vertretbarkeit, auf welches sich für das Fraenkelsche Axiomensystem das Axiom der Bestimmtheit somit reduzieren läßt, von den übrigen Axiomen unabhängig ist. Um den Unabhängigkeitsbeweis zu führen, bedienen wir uns wieder des im vorigen Paragraphen benutzten Verfahrens: Wir versuchen, ein System von Mengen zu finden, in dem die Axiome II bis VII sämtlich erfüllt sind, wobei außerdem die Gleichheitsbeziehung zwischen zwei Mengen durch die Definition (B) festgelegt ist, während das Axiom der

Vertretbarkeit nicht gilt. Betrachten wir wieder das System der geordneten Mengen, für das nach § 2 die Axiome II bis VII erfüllt sind, so besagt die Definition (B) der Gleichheit, daß zwei (geordnete) Mengen einander gleich sind, wenn sie dieselben Elemente besitzen. Es folgt aber keineswegs, daß zwei geordnete Mengen, die einander gleich sind, auch die gleiche Anordnung der Elemente besitzen. Nun möge das betrachtete System insbesondere folgende Mengen enthalten:

1) zwei verschiedene Mengen a und b,

2) zwei Mengen $m = \{a, b\}$ mit der Ordnungbeziehung $a \prec b$ und $m' = \{b, a\}$ mit der Ordnung $b \prec a$,

3) die Mengen $\{m\}$ und $\{m'\}$.

Nach Definition (B) ist dann $m = m'$, da m und m' dieselben Elemente a und b und sonst keine Elemente besitzen; aber m ist nicht etwa mit m' identisch, denn m und m' unterscheiden sich ja in der Anordnung ihrer Elemente. Daher ist auch $\{m\}$ nicht gleich $\{m'\}$, weil eben ihre Elemente m und m' innerhalb des Systems der geordneten Mengen nicht dasselbe Ding bedeuten, und somit die definitionsgemäße Bedingung (B) für die Gleichheit nicht erfüllt ist. Gälte nun aber das Axiom der Vertretbarkeit, so würde aus $m = m'$ und $m \varepsilon \{m\}$ folgen: $m' \varepsilon \{m\}$ und genau ebenso auch $m \varepsilon \{m'\}$. Dann wäre also wirklich jedes Element von $\{m\}$ gleichzeitig Element von $\{m'\}$ und umgekehrt oder nach Definition: $\{m\} = \{m'\}$. Wir hatten aber festgestellt, daß innerhalb des Systems der geordneten Mengen $\{m\}$ und $\{m'\}$ nicht gleich sind. Daher kann das Axiom der Vertretbarkeit in diesem System nicht erfüllt sein. M. a. W.: Das Axiom der Vertretbarkeit ist von den übrigen Axiomen unabhängig.

Der hiermit geführte Beweis bereitet vielleicht infolge der verschiedenartigen Bedeutung, die den Begriffen „gleich“ und „identisch“ beigelegt wird, zunächst dem Verständnis einige Schwierigkeiten. Wir wollen daher die Betrachtung noch an einem anschaulicheren System durchführen. Verstehen wir vorübergehend unter „Menge“ eine im Dezimalsystem geschriebene natürliche Zahl, unter „Element einer Menge“ Ziffer einer Zahl, wobei festgesetzt sei, daß (abweichend von dem gewöhnlichen Gebrauch) alle Zahlen, insbesondere auch mehrziffrige Zahlen, als Ziffern gelten können! Tritt also z. B. die zweiziffrige Zahl 12 als erste Ziffer einer zweiziffrigen Zahl auf, so bedeutet das, arithmetisch gesprochen, daß die betr. Zahl 12 Zehner enthält. Die als Ziffern aufzufassenden Zahlen oberhalb 9 werden wir der Einfachheit halber durch einen darübergesetzten Querstrich zusammenfassen. 123 be-

deutet demnach die Zahl, deren erste Ziffer 12, deren zweite Ziffer 3 ist, während 123 die Zahl bedeutet, deren erste Ziffer 1, deren zweite Ziffer 2 und deren dritte Ziffer 3 ist. Jede irgendwie gegebene Zahl soll durch die Gesamtheit ihrer Ziffern, der Ziffern ihrer Ziffern usw. gegeben sein, genau so, wie wir uns eine Menge durch die Gesamtheit ihrer Elemente, der Elemente der Elemente usw. gegeben denken. Dabei sollen nur die Zahlen betrachtet werden, deren sämtliche Ziffern voneinander verschieden sind. Ferner soll eine Zahl nur dann als Ziffer einer andern Zahl gelten dürfen, wenn sie von dieser verschieden ist. Dadurch wird der Fall ausgeschlossen, daß eine Zahl sich selbst als Ziffer enthält. $\overline{123}$ würde danach keine Elemente enthalten, also vom Charakter einer Nichtmenge sein. Schwierigkeiten ergeben sich für die Definition der Nullmenge. Wir werden jedoch unten zeigen, wie sich dies beheben läßt. Zunächst werde die Unabhängigkeitsbetrachtung an unserm System einmal durchgeführt.

Die Definition (B) der Gleichheit verlangt hier offenbar: Zwei Zahlen sind gleich, wenn sie dieselben Ziffern besitzen. Daraus folgt sofort mit Hilfe des kommutativen Gesetzes der Addition der Satz: Sind zwei Zahlen einander gleich, so sind ihre arithmetischen Quersummen einander arithmetisch gleich[1]). Liegen nun zwei Zahlen vor: $\overline{123}$ und $\overline{213}$, deren erste Ziffern 12 bezw. 21, deren zweite Ziffern beidemale 3 sind, so ist definitionsgemäß 12 gleich 21, da sowohl 12 als auch 21 dieselben beiden Ziffern 1 und 2 enthält. Andrerseits ist die Quersumme der ersten Zahl $12 + 3$ oder 15, die der zweiten $21 + 3$ oder 24. Es ist also nach dem oben gefolgerten Satze über die Quersummen gleicher Zahlen ausgeschlossen, daß die beiden Zahlen $\overline{123}$ und $\overline{213}$ einander gleich sind. Gälte jedoch das Axiom der Vertretbarkeit, so müßte aus der Gleichheit von 12 und 21 folgen, daß auch 12 Ziffer der zweiten Zahl und 21 Ziffer der ersten Zahl ist, und die Quersummen würden beidemale übereinstimmen. Das Axiom der Vertretbarkeit führt also zu unmöglichen Folgerungen; es kann daher in dem betrachteten System nicht gelten.

Um nun die oben erwähnte Schwierigkeit betr. die Definition der Nullmenge zu lösen, wollen wir folgendermaßen vorgehen: Unter Zahlen seien jetzt Mengen spezieller Art verstanden und zwar

---

1) Das Wort „gleich“ ist hier für die der Definition (B) entsprechende Beziehung verwandt, während die gewöhnliche Gleichheit durch das Beiwort „arithmetisch“ gekennzeichnet ist. Z. B. sind 123 uud 123 arithmetisch gleich, keineswegs aber im Sinne der Definition (B).

1) die in ihrer „natürlichen“ Reihenfolge geordnet gedachten Abschnitte von $Z_0 = \{0, \{0\}, \{\{0\}\}, \cdots\}$[1]), ausgenommen die Nullmenge,

2) geordnete endliche Mengen von Zahlen mit mindestens zwei Elementen.

Die Nullmenge werde zum Unterschied von der Zahl 0 mit $\bar{0}$ bezeichnet. Wir wählen dann die folgende Zuordnung zwischen den Abschnitten von Z_0 und den natürlichen Zahlen:

$$\begin{array}{ccccccc} \{\bar{0}\}, & \{\bar{0}, \{\bar{0}\}\}, & \{\bar{0}, \{\bar{0}\}, \{\{\bar{0}\}\}\} & \text{usw.} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & 1 & 2 & \text{usw.} \end{array}$$

Die Abschnitte von Z_0 stellen hierbei die einziffrigen Zahlen dar. Hier gibt es also keine Zahlen mehr, die Nichtmengen sind. Die geordneten Mengen von Abschnitten stellen die zwei- und mehrziffrigen Zahlen dar. Die vorhin benutzten Zahlen sind danach folgendermaßen zu schreiben:

$$\overline{123} = \{\{\{\bar{0}, \{\bar{0}\}\}, \{\bar{0}, \{\bar{0}\}, \{\{\bar{0}\}\}\}\}, \{\bar{0}, \{0\}, \{\{\bar{0}\}\}, \{\{\{\bar{0}\}\}\}\}\}.$$

Man sieht hier sehr leicht, daß die Zuordnung zwischen den oben benutzten Zahlen und den als Zahlen gedeuteten speziellen Mengen eine eindeutige ist. Diese Zuordnung gibt uns die Möglichkeit, die vorher gemachten Betrachtungen in die Mengenlehre hineinzustellen.

Als Ergebnis dieses Paragraphen ist damit gewonnen: Es ist für das Fraenkelsche Axiomensystem möglich, das Axiom der Bestimmtheit durch das Axiom der Vertretbarkeit zu ersetzen, wenn gleichzeitig das Axiom der Bestimmtheit als Definition der Gleichheitsbeziehung aufgefaßt wird. Das Axiom der Vertretbarkeit ist dabei unentbehrlich. Es werde bemerkt, daß mit der Ersetzung des Axioms der Bestimmtheit durch die Definition der Gleichheit und das Axiom der Vertretbarkeit eine Verbesserung des Axiomensystems erzielt wird, und zwar nach zwei Richtungen hin: Einerseits wird durch die Definition der Gleichheit die Zahl der Grundbeziehungen auf eine einzige, nämlich die des „Elementseins“ und deren Negation, zurückgeführt; andrerseits kommt die tatsächliche Bedeutung des Axioms der Bestimmtheit durch das Axiom der Vertretbarkeit in schärferer Weise zum Ausdruck, als dies in der Zermeloschen Fassung der Fall ist.

1) Im Sinne der Lehre von den wohlgeordneten Mengen; vgl. Fraenkel, IV, § 4, Nr. 47, wo die „natürliche“ Wohlordnung von Z_0 aus den Axiomen hergeleitet wird.

II. Kapitel: Das Axiom der Paarung.

§ 1.

Der „kleinste Teilbereich" in der Fraenkelschen Axiomatik.

Definition 1: Unter dem kleinsten Teilbereich der durch die Fraenkelschen Axiome I bis VII zugelassenen Mengenlehre verstehen wir den Bereich $\mathfrak{R}$, in dem alle und nur die Mengen existieren, die aus der Menge Z_0 durch Anwendung der Axiome III bis VI gebildet werden können[1]).

Ob es möglich ist für den kleinsten Teibereich $\mathfrak{R}$, den „kategorischen" Bereich, eine andere einwandfreie Definition zu finden als die hier gegebene, soll in dieser Arbeit nicht weiter untersucht werden[2]). Für die hier gegebene Definition ist der Begriff der natürlichen Zahl, wie er in dem Ausdruck „Anwendung der Axiome" steckt, wesentlich, und wir wollen auch für die im Folgenden gegebenen Beweise von dem Begriff der natürlichen Zahl Gebrauch machen; denn eine Vermeidung desselben müßte, wenn sie möglich sein sollte, eine derartige Komplizierung des Beweisverfahrens mit sich bringen, daß die eigentlich wesentlichen Gedankengänge dadurch völlig verdeckt würden[3]).

Definition 2: Ist $\varkappa$ irgendeine natürliche Zahl und die Menge $Z_\varkappa$ als Potenzmenge von $Z_{\varkappa-1}$, insbesondere Z_1 als Potenzmenge von Z_0 definiert, so heißt eine Menge des Bereiches $\mathfrak{R}$ von der Ordnung $\varkappa$, falls sie Element von $Z_\varkappa$, aber nicht Element einer Menge Z_λ für $\lambda < \varkappa$ ist. (Die Zahl 0 gelte dabei als natürliche Zahl.)

Wir gehen zum Beweise zweier Sätze über:

Satz 1: Jede Menge Z_n enthält alle die Mengen des Bereiches $\mathfrak{R}$, deren Ordnung $\varkappa$ kleiner oder gleich n ist, als Elemente.

Beweis durch vollständige Induktion: Der Satz gelte für alle $n \leqq m$, wobei m mindestens gleich 1 sei. Dann enthält Z_m alle Mengen des Bereiches $\mathfrak{R}$, deren Ordnung $\varkappa \leqq m$ ist, als Elemente. Es soll gezeigt werden, daß der Satz auch noch für $n = m+1$ gilt,

---

1) Vgl. Fraenkel, II.

Die Zulassung von Axiom II in der Definition von $\mathfrak{R}$ ist hier aus Bequemlichkeitsgründen unterblieben. Es wird sich später herausstellen, daß der Bereich $\mathfrak{R}$ durch diese Zulassung überhaupt nicht berührt wird.

2) Vgl. dazu J. v. Neumann, Zitat von S. 1, Kap. II, § 5, u. Finsler, Jahresb. d. Deutschen Math.-Ver., **34** (1925), S. 143 ff.

3) Vgl. dazu das in der Einleitung Gesagte.

d. h. daß Z_{m+1} unter der gemachten Voraussetzung alle Mengen des Bereiches $\mathfrak{R}$, deren Ordnung $\varkappa \leqq m+1$ ist, als Elemente enthält.

Es sei M_λ irgendeine Menge von der Ordnung λ, wo $\lambda \leqq m$ ist. Dann ist also M_λ Element von Z_m (nach der gemachten Voraussetzung). Nun ist andrerseits $Z_m = \mathfrak{U} Z_{m-1}$ die Potenzmenge von Z_{m-1}. Die Aussage: „M_λ ist Element von Z_m“ ist daher gleichbedeutend mit: M_λ ist Teilmenge von Z_{m-1}. Daraus folgt aber, daß die Elemente von M_λ auch Elemente von Z_{m-1} sind. Jedes Element von M_λ ist daher von einer Ordnung μ, welche höchstens gleich $m-1$ ist. Dann ist sicher $\mu < m$, und es ergibt sich aus unserer Voraussetzung, daß die Elemente von M_λ gleichfalls Elemente von Z_m sind. M_λ ist daher Teilmenge von Z_m und als solche Element von $Z_{m+1} = \mathfrak{U} Z_m$. Damit ist gezeigt, daß jedes Element von Z_m auch Element von Z_{m+1} ist, daß also Satz 1 für $n = m+1$ gültig bleibt, falls er für $n = m$ gilt. Satz 1 gilt aber jedenfalls für $n = 1$; ist nämlich $\{a\}$ ein beliebiges von Null verschiedenes Element von Z_0, so ist auch a Element von Z_0; $\{a\}$ ist daher Teilmenge von Z_0 und damit Element von Z_1 (was auch von der Nullmenge gilt). Gilt der Satz aber für $n = 1$, so gilt er nach dem oben Bewiesenen für jede natürliche Zahl n.

Satz 2: Jede Menge des Bereiches $\mathfrak{R}$ ist von bestimmter endlicher Ordnung.

Beweis: Der Bereich $\mathfrak{R}$ geht nach Definition 1 aus der Menge Z_0 durch (endlichmalige) Anwendung der Axiome III bis VI hervor. Z_0 ist Element von Z_1, daher nach Definition 2 von der Ordnung 1. Jede Teilmenge von Z_0 ist gleichfalls Element von Z_1 und daher, falls sie mindestens zwei Elemente enthält, von der Ordnung 1, falls sie höchstens ein Element enthält, also auch Element von Z_0 ist, von der Ordnung 0. Ferner ist die Vereinigungsmenge von Z_0 gleich Z_0, also von der Ordnung 1, die Potenzmenge von Z_0 gleich Z_1, also von der Ordnung 2. Eine Auswahlmenge von Z_0 existiert nicht, weil die Nullmenge Element von Z_0 ist. Alle durch einmalige Anwendung der Axiome aus Z_0 zu bildenden Mengen sind somit von bestimmter endlicher Ordnung.

Wir werden jetzt den Beweis des Satzes 2 so führen, daß wir zeigen: Ist $M_\varkappa$ irgendeine Menge von der Ordnung $\varkappa$, so ist die Vereinigungsmenge, die Potenzmenge, sowie jede Teilmenge und jede Auswahlmenge von $M_\varkappa$ von bestimmter endlicher Ordnung. Ist dies bewiesen, so folgt daraus, daß man, von Z_0 ausgehend, durch Anwendung der Axiome stets wieder zu Mengen von bestimmter endlicher Ordnung gelangt.

Was zunächst die Vereinigungsmenge betrifft, so sei vorerst $\varkappa \geqq 2$ angenommen. Nach Definition 2 ist $M_\varkappa \varepsilon Z_\varkappa$ und wegen $Z_\varkappa = \mathfrak{U} Z_{\varkappa-1} : M_\varkappa$ Teilmenge von $Z_{\varkappa-1}$. Ist a ein beliebiges Element von $M_\varkappa$, so gilt demnach $a \varepsilon Z_{\varkappa-1}$. Die Elemente von $M_\varkappa$ besitzen daher höchstens die Ordnung $\varkappa - 1$. Auf genau demselben Wege schließt man, daß alle Elemente der Elemente von $M_\varkappa$ höchstens von der Ordnung $\varkappa - 2$ sind. Andrerseits enthält $M_\varkappa$ mindestens ein Element a' von der Ordnung $\varkappa - 1$. Denn wären alle Elemente von $M_\varkappa$ von niedrigerer Ordnung, so wären sie nach Satz 1 alle in $Z_{\varkappa-2}$ als Elemente enthalten. $M_\varkappa$ wäre dann aber Teilmenge von $Z_{\varkappa-2}$ und als solche Element von $Z_{\varkappa-1}$, d. h. $M_\varkappa$ wäre von der Ordnung $\varkappa - 1$ entgegen der Voraussetzung. Auf genau demselben Wege schließt man, daß a' mindestens ein Element von der Ordnung $\varkappa - 2$ enthält. Daraus ergibt sich, daß die Elemente der Elemente von $M_\varkappa$ sämtlich in $Z_{\varkappa-2}$ als Elemente vorkommen, daß sie aber gewiß nicht alle in einer Menge Z_λ, wo $\lambda < \varkappa - 2$ ist, als Elemente enthalten sind. Die Vereinigungsmenge $\mathfrak{S} M_\varkappa$ ist also Teilmenge von $Z_{\varkappa-2}$ (aber nicht Teilmenge einer Menge Z_λ mit kleinerem Index), und als solche Element von $Z_{\varkappa-1}$; $\mathfrak{S} M_\varkappa$ ist also von der Ordnung $\varkappa - 1$.

Ist dagegen $\varkappa = 0$, also $M \varepsilon Z_0$, so ist $\mathfrak{S} M$ ebenfalls Element von Z_0 und folglich von der Ordnung 0. Ist ferner $\varkappa = 1$, also M Teilmenge von Z_0 mit mindestens zwei Elementen, so sind die Elemente von M Elemente von Z_0. $\mathfrak{S} M$ ist dann im allgemeinen von der Ordnung 1; ist aber M insbesondere von der Form $\{0, \{a\}\}$, so ist $\mathfrak{S} M = \{a\}$ von der Ordnung 0. Damit sind für die Bildung der Vereinigungsmenge alle vorkommenden Fälle erledigt.

Weiter ergibt sich, da die Elemente von $M_\varkappa$ in $Z_{\varkappa-1}$, aber nicht sämtlich in einer Menge Z_λ von kleinerem Index vorkommen, daß alle Teilmengen von $M_\varkappa$ in $Z_\varkappa$ als Elemente enthalten sind, aber nicht in einer Menge Z_λ von kleinerem Index. Die Potenzmenge von $M_\varkappa$ ist daher Teilmenge von $Z_\varkappa$ und als solche von der Ordnung $\varkappa + 1$. Dies gilt auch noch, wie leicht zu sehen ist, für $\varkappa = 0$ und $\varkappa = 1$, mit Ausnahme von $M_\varkappa = 0$ (d. h. $\varkappa = 0$), wofür auch die Ordnung von $\mathfrak{U} 0$ gleich 0 ist.

Die Teilmengen von $M_\varkappa$ sind sämtlich Elemente von $Z_\varkappa$ und daher von der Ordnung $\varkappa$ oder von niedrigerer Ordnung. Es läßt sich nun von jeder (etwa gebildeten) Teilmenge entscheiden, ob sie Element einer Menge Z_λ mit kleinerem Index als $\varkappa$ ist. Liegt etwa eine Teilmenge T (- $M_\varkappa$ vor, so bilde man der Reihe nach gemäß dem Axiom der Aussonderung die Mengen $Z_{0\,y=T}$, $Z_{1\,y=T}$ bis $Z_{\varkappa\,y=T}$, wobei y jedesmal die Elemente der betreffenden Menge

Z_i durchläuft. Ist dabei $Z_{\lambda y} = T$ die erste Menge der Reihe, welche nicht leer ist, so ist $T \varepsilon Z_\lambda$ und also T von der Ordnung λ. Da das Verfahren jedenfalls nur die Bildung endlich vieler Mengen erfordert, so ist es in jedem vorliegenden Falle durchführbar. In entsprechender Weise läßt sich die Ordnung einer Auswahlmenge von $M_\varkappa$ bestimmen; denn eine solche ist ja Teilmenge von $\mathfrak{S} M_\varkappa$.

Damit ist aber Satz 2 vollkommen bewiesen. Denn gehen wir jetzt von Z_0 aus und bilden mit Hilfe der Axiome III bis VI neue Mengen, so ist nach jedem Schritt die gebildete Menge von bestimmter endlicher Ordnung, und es läßt sich daraus induktiv schließen, daß jede durch Anwendung der Axiome aus Z_0 hervorgehende Menge, d. h. jede Menge des Bereiches $\mathfrak{R}$, von bestimmter endlicher Ordnung ist.

§ 2.

Beweisbarkeit des Axioms der Paarung in der Fraenkelschen Axiomatik für spezielle Bereiche.

In der Definition des kleinsten Teilbereiches $\mathfrak{R}$ im vorigen Paragraphen war das Axiom der Paarung nicht mit zur Bildung neuer Mengen herangezogen worden. Wir können aber jetzt leicht zeigen, daß jede Menge, die man mit Hilfe des Axioms der Paarung aus den Mengen des Bereiches $\mathfrak{R}$ etwa bilden könnte, bereits in $\mathfrak{R}$ enthalten ist. Es gilt nämlich zunächst:

Satz 1: Sind m und n irgend zwei Mengen des Bereiches $\mathfrak{R}$, so existiert in $\mathfrak{R}$ eine Menge Z, die sowohl m als auch n als Elemente enthält.

Beweis: Nach Satz 2 des vorigen Paragraphen sind m und n als Mengen des Bereiches $\mathfrak{R}$ von bestimmter endlicher Ordnung. Sei nun etwa $\varkappa$ der größere der beiden Ordnungsindizes, so enthält nach Satz 1 des vorigen Paragraphen die Menge $Z_\varkappa$ sowohl m als auch n als Elemente.

Satz 2: Sind m und n irgend zwei verschiedene Mengen, und existiert eine Menge M, die sowohl m als auch n als Elemente enthält, so läßt sich die Paarmenge $p = \{m, n\}$, die m und n als einzige Elemente enthält, allein schon auf Grund des Aussonderungsaxioms bilden.

Beweis: Nach Voraussetzung sind m und n Elemente von M. Dann existiert nach dem Axiom der Aussonderung die Teilmenge M' von M, die alle und nur die Elemente von M enthält, die von m verschieden sind: $M' = M_{y \neq m}$, wo y die Elemente von M durchläuft. Da $m \neq n$ vorausgesetzt war, so gilt $n \varepsilon M'$. Wir

bilden weiter die Teilmenge: $M'' = M'_{x \neq n}$, wo x die Elemente von M' durchläuft. Dann ist die Komplementärmenge von M'' bezüglich M, d. h. die Menge: $p = M_{y \bar{\in} M''}$, die gesuchte Paarmenge $\{m, n\}$. Denn p enthält sowohl m als auch n, aber kein von m und n verschiedenes Element.

Aus Satz 1 und 2 folgt sofort, daß jede mit dem Axiom der Paarung aus den Mengen des Bereiches $\mathfrak{R}$ zu bildende Menge auch ohne das Axiom II gewonnen werden kann. Der Bereich $\mathfrak{R}$ wird also durch Hinzunahme des Axioms der Paarung nicht erweitert. Wenn wir daher jetzt wie folgt definieren:

Definition: „Unter dem kleinsten Teilbereich verstehen wir den Bereich $\mathfrak{R}$, der aus Z_0 durch Anwendung der Axiome II bis VI hervorgeht", so ist dieser Bereich $\mathfrak{R}$ mit dem der Definition 1 des vorigen Paragraphen vollkommen identisch. Wir können dies Ergebnis auch so formulieren:

Hauptsatz: In dem kleinsten Teilbereich $\mathfrak{R}$ folgt das Axiom der Paarung aus den übrigen Axiomen.

Der Bereich $\mathfrak{R}$ umfaßt nun noch nicht die gesamte Mengenlehre[1]). Um z. B. die Existenz gewisser Mengen von größerer Mächtigkeit, als sie in $\mathfrak{R}$ vorkommen, sicherzustellen, braucht man eine Erweiterung des Axiomensystems. Dazu liegen bisher zwei konkrete Vorschläge vor[2]), und wir wollen untersuchen, ob auch bei solcher Erweiterung die Beweisbarkeit des Axioms der Paarung bestehen bleibt.

In seiner Mengenlehre (a. a. O.) schlägt Fraenkel vor, das Axiom VII in folgender Weise zu erweitern:

Axiom VII a: Ist φ irgendeine Funktion und m irgendeine Menge, so existiert eine Menge Z, die m als Element enthält, und die zu jedem ihrer Elemente a auch $\varphi(a)$ als Element enthält.

Mit dem so formulierten Axiom ergibt sich dann die Beweisbarkeit des Axioms der Paarung auf folgende einfache Weise: Sind α und β zwei beliebig gegebene Mengen, so wählen wir in Axiom VII a: $m = \alpha$ und $\varphi(x) = \beta$, wo die Funktion φ also eine Konstante bedeutet. Dann enthält die Menge Z sicher α und $\varphi(a) = \beta$ als Elemente, und nach Satz 2 läßt sich die Paarmenge $\{\alpha; \beta\}$ ohne Benutzung des Axioms II bilden.

Man könnte nun versuchen, in dem erweiterten Bereich die Unabhängigkeit des Axioms der Paarung dadurch zu sichern, daß man in VII a konstante Funktionen φ ausschließt. Aber das Axiom

1) Vgl. Mengenlehre, S. 217.

2) Eine genauere Diskussion derselben ist bisher noch nicht erfolgt.

II würde trotzdem beweisbar bleiben, wenigstens in dem kleinsten Bereich, der sich unter Hinzuziehung von VIIa aus den Axiomen II bis VI ergibt; dieser Bereich werde mit $\overline{\mathfrak{R}}$ bezeichnet. Zunächst existiert nach VIIa die Menge Z_0, wie sich sofort ergibt, wenn man $m = 0$ und $\varphi(x) = \{x\}$ setzt. Also ist $\mathfrak{R}$ Teilbereich von $\overline{\mathfrak{R}}$. Jetzt wollen wir $\mathfrak{R}$ mit Hilfe von VIIa schrittweise erweitern: Setzen wir $m = Z_0$ und $\varphi(x) = \mathfrak{U}x$, so existiert die Menge $\bar{Z} = \{Z_0, Z_1, Z_2, \ldots\}$. In $\bar{Z}$ kommt nun nach § 1 jede Menge des Bereiches $\mathfrak{R}$ als Element irgendeines Elementes Z_n von $\bar{Z}$ vor. Bilden wir also $\mathfrak{S}\bar{Z} = S_0$, so ist S_0 diejenige Menge, welche alle Mengen des Bereiches $\mathfrak{R}$ und nur diese enthält. Wählen wir jetzt in VIIa für m irgendeine Menge des Bereiches $\mathfrak{R}$ und irgendeine Funktion φ[1]), so sind alle Mengen $\varphi(a)$ ebenfalls in $\mathfrak{R}$ enthalten, und die sich ergebende Menge ist Teilmenge von S_0. In dem Bereich, der sich aus S_0 mit den Axiomen II bis VI ergibt, lassen sich nun ganz analoge Betrachtungen anstellen, wie in dem Bereiche $\mathfrak{R}$, und es läßt sich dann zeigen, daß auch in diesem Bereiche — wir wollen ihn mit $\mathfrak{R}^{(0)}$ bezeichnen — jede Menge Element einer bestimmten Menge S_n ist, wo wieder $S_n = \mathfrak{U}S_{n-1}$ ist. Ganz entsprechend wie im Bereich $\mathfrak{R}$ läßt sich daraus weiter schließen, daß jede Paarmenge im Bereiche $\mathfrak{R}^{(0)}$ ohne das Axiom der Paarung darstellbar ist.

Nun kann man weitergehen, indem man in VIIa $m = S_0$ und $\varphi(x) = \mathfrak{U}(x)$ setzt, und kommt so zu einer Menge $\bar{S} = \{S_0, S_1, S_2, \ldots\}$. Die Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}\bar{S}$ werde mit $S_0^{(1)}$ und der aus $S_0^{(1)}$ mit den Axiomen II bis VI zu bildende Bereich mit $\mathfrak{R}^{(1)}$ bezeichnet. Dann lassen sich wieder dieselben Schlüsse wie vorher machen: $S_0^{(1)}$ enthält alle Mengen des Bereiches $\mathfrak{R}^{(0)}$; wendet man VIIa auf irgendeine Menge des Bereiches $\mathfrak{R}^{(0)}$ an, so ist die sich ergebende Menge Teilmenge von $S_0^{(1)}$ und daher im Bereiche $\mathfrak{R}^{(1)}$ enthalten; das Axiom der Paarung ist in $\mathfrak{R}^{(1)}$ ebenfalls beweisbar. So kann man induktiv fortfahren und zeigen, daß in jedem Bereich $\mathfrak{R}^{(n)}$, wo n eine endliche Zahl bedeutet, und wo $\mathfrak{R}^{(n)}$ aus $\mathfrak{R}^{(n-1)}$ in analoger Weise hervorgeht wie $\mathfrak{R}^{(1)}$ aus $\mathfrak{R}^{(0)}$, das Axiom der Paarung beweisbar bleibt. Andrerseits können wir durch endlichmalige Anwendung der Axiome niemals zu einem Bereich $\mathfrak{R}^{(\omega)}$ mit unendlichem Index gelangen. Wir können auf Grund dieses hier nur angedeuteten Gedankengangs unsern Hauptsatz dahin erweitern:

---

1) „Funktion“ ist hier im bisherigen Sinne gebraucht; die (für spezielle Zwecke nützliche) Erweiterung des Funktionsbegriffs auf die durch Axiom VIIa bezeichneten Prozesse soll also außer Acht bleiben.

Zusatz zum Hauptsatz: In dem kleinsten Bereich, der sich aus $\mathfrak{R}$ mit Hinzuziehung des erweiterten Axioms VII a ergibt, ist das Axiom der Paarung beweisbar, selbst dann, wenn in VII a die Funktion φ der Beschränkung unterliegt, nicht konstant zu sein.

Nun ist für gewissse Zwecke auch das Axiom VII a noch nicht ausreichend. Fraenkel hat daher ein neues Axiom in Vorschlag gebracht[1]:

VIII. Ersetzungsaxiom: Ist $\varphi(x)$ eine Funktion, so entsteht aus einer Menge m, falls jedes Element $x \varepsilon m$ durch die Menge $\varphi(x)$ ersetzt wird, wiederum eine Menge.

Für den kleinsten Bereich, der sich unter Hinzuziehung des Axioms VIII ergibt, bietet der Beweis der Abhängigkeit oder Unabhängigkeit des Axioms der Paarung noch große Schwierigkeiten und ist anscheinend nicht ohne eingehende Betrachtung des Systems aller überhaupt möglichen Funktionen zu geben. Es sei hier nur kurz darauf hingewiesen, welche Probleme sich dabei ergeben.

Die Abhängigkeit des Axioms der Paarung ist dann bewiesen, wenn es möglich ist, zu zwei beliebig gegebenen Mengen m und n des betrachteten Bereiches mittels des Axioms VIII eine Menge zu bilden, die m und n als Elemente enthält: d. h. wenn zu zwei beliebig gegebenen Mengen m und n stets eine Funktion φ existiert, so daß für mindestens ein Mengenpaar a, b, wobei a und b in mindestens einer Menge des Bereiches zusammen als Elemente vorkommen, $\varphi(a) = m$ und $\varphi(b) = n$ wird.

Dagegen ist in diesem Falle die Unabhängigkeit des Axioms der Paarung dann bewiesen, wenn sich zeigen läßt, daß zwei Mengen m und n existieren, so daß für jede beliebige Funktion φ, für die $\varphi(a) = m$ ist, stets $\varphi(b) \neq n$ ist, wobei a, b alle Mengenpaare durchläuft, in denen a und b Elemente derselben Menge bedeuten.

Bisher ist eine einwandfreie Beantwortung des Problems in dem einem oder andern Sinne noch nicht gelungen, und damit die Frage der Unabhängigkeit des Axioms der Paarung für diesen Fall noch ungeklärt.

§ 3.

Beweis der Unabhängigkeit des Axioms der Paarung.

Wir wollen jetzt dazu übergehen, unter Verzicht auf die Forderung der „Kategorizität“ (vgl. § 1), der der Bereich $\mathfrak{R}$ genügte, die Unabhängigkeit des Axioms der Paarung zu beweisen. Betrachten wir zunächst einmal das Zermelosche System. Wir hatten

1) Fraenkel, III, § 4, Nr. 28.

bereits im § 3 des I. Kapitels darauf hingewiesen, daß es sich durch die Zulassung von Dingen, die selbst keine Mengen sind, wesentlich von dem Fraenkelschen System unterscheidet.

Zermelo fordert in seinem Axiom II (Axiom der Elementarmengen) außer der Existenz der Paarmengen noch die Existenz der Nullmenge und der Menge $\{a\}$, wo a irgend ein Ding bedeutet. Die Existenz der Nullmenge folgt nun nach Fraenkel[1]) aus der Annahme, daß überhaupt eine Menge existiert. Würde Zermelo das Axiom VII in der Fassung Fraenkels gegeben haben, die die Existenz der Nullmenge nicht voraussetzt, so wäre die Forderung der Nullmenge entbehrlich. Da aber seine Formulierung des Axioms VII bereits die Existenz der Nullmenge voraussetzt, und außer den Axiomen II und VII keines die Existenz einer Menge fordert, so ist für Zermelo die Forderung der Existenz der Nullmenge notwendig, im wesentlichen als die Forderung der Existenz überhaupt einer Menge. Fernerhin läßt sich, wenigstens wenn man $=$ als Grundbeziehung voraussetzt[2]), nach Fraenkels Verfahren die Existenz der Menge $\{a\}$ nachweisen.

Wir gehen jetzt zum Beweise der Unabhängigkeit des Axioms der Paarung (welches einen Teil des Zermeloschen Axioms II darstellt) über. Wir betrachten zu diesem Zweck einen Bereich $\mathfrak{B}$ von Mengen, der alle Mengen des Bereiches $\mathfrak{R}$ enthält und außerdem mindestens ein Ding a enthält, welches von der Nullmenge verschieden ist und selbst keine Menge darstellt. Zählen wir nun die Nullmenge mit zu den Mengen, so folgt aus den Betrachtungen des § 1, daß der Bereich $\mathfrak{R}$ nur solche Mengen enthält, die selbst wieder Mengen als Elemente enthalten, wobei die Nullmenge die einzige Ausnahme ist. Die Elemente irgend einer Menge aus $\mathfrak{R}$ gehören selbst wieder dem Bereiche $\mathfrak{R}$ an und besitzen daher dieselbe Eigenschaft. Infolgedessen ist es unmöglich mit Hilfe der Axiome III bis VI aus irgend einer Menge des Bereiches $\mathfrak{R}$ etwa die Menge $\{0, a\}$ zu bilden. Denn in dieser kommt ja außer der Nullmenge noch ein Ding vor, das keine Elemente enthält. Ebensowenig kann aber unter Mitbenutzung des Dinges a mit den Axiomen III bis VI eine Menge $\{0, a\}$ gebildet werden. Denn diese Axiome sind nur auf Mengen anwendbar; ihre Aussagen sind ja sämtlich von der Form: Falls eine Menge existiert, so existiert ihre Vereinigungsmenge, Potenzmenge usw. Wenn also das Axiom der Paarung ausgeschlossen bleibt, so existiert in $\mathfrak{B}$ die Menge

1) Mengenlehre, S. 198.

2) Für die Möglichkeit auf diese Voraussetzung zu verzichten vgl. man die S. 9 zitierte Stelle (Fußnote 1).

$\{0, a\}$ nicht. Daraus folgt unmittelbar die Unabhängigkeit des Axioms der Paarung im Zermeloschen System.

Man kann nun auf einem ähnlichen Wege für einen nicht-„kategorischen" Bereich des Fraenkelschen Systems die Unabhängigkeit des Axioms der Paarung beweisen. Liegt eine Menge M_n des Bereiches $\mathfrak{R}$ von der Ordnung $n > 1$ vor, so ist nach § 1 die Vereinigungsmenge $\mathfrak{S} M_n$ von der Ordnung $n-1$. Indem man $(n-1)$-mal hintereinander die Vereinigungsmenge bildet, kommt man schließlich auf eine Menge von der Ordnung 1, d. h. eine Teilmenge von Z_0. Läßt man nun außer den Mengen des Bereiches $\mathfrak{R}$ eine Menge m_0 zu, die ein einziges Element m_1 enthält, wobei m_1 wieder ein einziges Element m_2, allgemein $m_\varkappa$ für jeden Index $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$ ein einziges Element $m_{\varkappa+1}$ enthält — solche Mengen sind durch die Axiome I bis VII nicht ausgeschlossen (vgl. Mengenlehre, S. 218) —, so kommt man durch n-malige Bildung der Vereinigungsmenge zu einer Menge m_n, die denselben Charakter wie m_0 trägt und jedenfalls, wie groß auch n gewählt wird, nicht Teilmenge von Z_0 ist. Diese Menge m_0 kann daher nicht dem Bereiche $\mathfrak{R}$ angehören. Ferner ist m_0 eine endliche Menge, und alle aus m_0 mit Hilfe der Axiome III bis VI hervorgehenden Mengen sind wieder endlich, was, wie leicht zu sehen ist, sich induktiv beweisen läßt. Insbesondere ist auch die Vereinigungsmenge einer jeden Menge, die auf diese Weise aus m_0 hervorgeht, eine endliche Menge. Es ist also unmöglich von m_0 ausgehend eine Menge $\{Z_0, m_0\}$ durch bloße Anwendung der Axiome III bis VI zu bilden. Denn die Vereinigungsmenge von $\{Z_0, m_0\}$ ist jedenfalls unendlich. Aber auch dem Bereiche $\mathfrak{R}$ kann ja die Menge $\{Z_0, m_0\}$ nicht angehören, da sonst auch m zu $\mathfrak{R}$ gehören müßte. Das Axiom der Paarung ist daher in dem durch die Menge m_0 erweiterten Bereiche $\mathfrak{R}$ nicht mehr eine Folge der übrigen Axiome.

Wir haben damit das Ergebnis: Verlangen wir von der Fraenkelschen Axiomatik nicht die Eigenschaft der „Kategorizität", so ist das Axiom der Paarung von den übrigen Axiomen unabhängig.

Aus dieser Betrachtung folgt übrigens, daß für die allgemeine Mengenlehre, d. h. für denjenigen Teil der Mengenlehre, der ohne spezielle Existenzaxiome, wie es z. B. das Axiom VII darstellt, auskommt, die Beibehaltung des Axioms der Paarung wünschenswert ist. Denn die allgemeine Mengenlehre muß auch die Existenz solcher Bereiche wie des eben betrachteten als möglich ansehen.

III. Kapitel: Das Axiom der Vereinigung.

§ 1.

Beweisbarkeit des Axioms der Vereinigung für den „kleinsten Teilbereich".

Wir schließen die Betrachtung dieses Paragraphen unmittelbar an den § 1 des vorigen Kapitels an und legen die dort gegebenen Definitionen und Sätze zu Grunde. Unser Ziel ist, zu zeigen, daß für jede Menge $M_\varkappa$ des Bereiches $\mathfrak{R}$ die Vereinigungsmenge $\mathfrak{S} M_\varkappa$ ohne Benutzung des Axioms der Vereinigung gebildet werden kann.

$M_\varkappa$ sei eine beliebige Menge des Bereiches $\mathfrak{R}$ von der Ordnung $\varkappa$. Aus den Ergebnissen des § 1 des vorigen Kapitels wissen wir, daß die Vereigungsmenge von $M_\varkappa$, falls $\varkappa > 1$ ist, die Ordnung $\varkappa - 1$ besitzt; ist $\varkappa = 1$, so ist die Ordnung von $\mathfrak{S} M_\varkappa$ 0 oder 1, für $\varkappa = 0$ gleich 0. Ferner hatten wir gefunden, daß die Elemente der Elemente von $M_\varkappa$ höchstens die Ordnung $\varkappa - 2$ besitzen, wobei zu berücksichtigen ist, daß im Falle $\varkappa < 2$ die Ordnung niemals kleiner als Null wird. Alle Elemente der Elemente von $M_\varkappa$ kommen also in $Z_{\varkappa-2}$ (für $\varkappa = 0$ oder $\varkappa = 1$ in Z_0) vor. Die Vereinigungsmenge von $M_\varkappa$, d. h. die Menge, welche alle Elemente der Elemente von $M_\varkappa$ enthält, ist also jedenfalls Teilmenge von $Z_{\varkappa-2}$ (bezw. Z_0). Unsere Aufgabe ist nun aus der Menge $Z_{\varkappa-2}$ bezw. Z_0 ohne Anwendung des Vereinigungsaxioms eine Teilmenge zu bilden, die gleich $\mathfrak{S} M_\varkappa$ ist, d. h. eine Teilmenge, die die sämtlichen Elemente der Elemente von $M_\varkappa$ und keine weiteren Elemente besitzt.

Der Einfachheit halber schreiben wir im Folgenden Z statt $Z_{\varkappa-2}$ bezw. Z_0, U statt $\mathfrak{U} Z$ und M statt $M_\varkappa$. $\mathfrak{S} M$ ist danach Teilmenge von Z und als solche Element von U. Lassen wir nun y die Elemente von U, x diejenigen von M durchlaufen, so kann man bei festgewähltem y diejenige Teilmenge von M bilden, deren Elemente x gleichzeitig Elemente von $\mathfrak{U} y$ oder, was dasselbe besagt: Teilmengen von y sind: $M = M_{x \varepsilon \mathfrak{U} y}$. Lassen wir y jetzt variabel, so wird M natürlich von y abhängen, und wir schreiben, um dies zum Ausdruck zu bringen: $M(y)$. $M(y)$ enthält alle und nur die Elemente von M, die Teilmengen von y sind. Unter den Elementen y von U kommt auch Z vor. Für $y = Z$ ist nun aber jedes Element von M Teilmenge von y, da ja Z alle Elemente der Elemente von M enthält. In diesem Falle ist also $M(y)$ gleich M. Bilden wir jetzt, indem wir y alle Elemente von U durchlaufen lassen, diejenige Teilmenge von U, für deren Elemente y stets $M(y) = M$

ist, d. h. die Menge: $T = U_{\overline{M}(y)=M}$, so ist T nicht leer, da ja $Z \varepsilon T$ sein muß. T enthält seiner Bildungsweise nach alle Teilmengen von Z, die sämtliche Elemente der Elemente von M besitzen.

Schließlich bilden wir, was auf Grund des Aussonderungsaxioms — ohne Benutzung der Axiome II und III — möglich ist[1]), den Durchschnitt $\mathfrak{D}T$ aller Elemente von T. $\mathfrak{D}T$ enthält alle Elemente der Elemente von M, aber keine weiteren Elemente.

Denn zunächst besitzt jedes Element von T die sämtlichen Elemente der Elemente von M als Elemente. Infolgedessen muß dasselbe auch für den Durchschnitt $\mathfrak{D}T$ der Fall sein. Wäre nun aber in $\mathfrak{D}T$ ein Element c enthalten, das nicht Element eines Elementes von M ist, so könnte man die Menge $\mathfrak{D}T - \{c\} = A$ bilden. A würde dann noch alle Elemente der Elemente von M enthalten, d. h. es würde für $y = A$ gelten: $\overline{M}(y) = M$. A kommt aber wirklich unter den Teilmengen von Z und damit unter den Elementen y von U vor, weil ja $\mathfrak{D}T$ als Durchschnitt von lauter Teilmengen von Z selbst eine Teilmenge von Z ist. Also würde A Element der Menge $T = U_{\overline{M}(y)=M}$ sein. Das ist aber nicht möglich, wenn $\mathfrak{D}T$ Durchschnitt aller Elemente von T ist. Daher muß $\mathfrak{D}T$ mit $\mathfrak{S}M$ identisch sein.

Damit ist es gelungen, für eine beliebige Menge des Bereiches $\mathfrak{R}$ die Vereinigungsmenge ohne Benutzung des Axioms der Vereinigung zu bilden. Aber auch das Axiom der Paarung ist dabei an keiner Stelle verwandt worden. Daraus folgt: Im Bereich $\mathfrak{R}$ ist das Axiom der Vereinigung aus den Axiomen I und IV bis VII beweisbar. Nun war aber im § 2 des vorigen Kapitels gezeigt worden, daß das Axiom der Paarung im Bereich $\mathfrak{R}$ aus den Axiomen I und III bis VII folgt. Wir können jetzt die beiden Ergebnisse zusammenfassen.

Hauptsatz: In dem kleinsten Teilbereich $\mathfrak{R}$ der aus der Fraenkelschen Axiomatik (ohne Erweiterung des Axioms VII) sich ergebenden Mengenlehre sind die Axiome II und III gleichzeitig aus den Axiomen I und IV bis VII beweisbar.

§ 2.

Beweisbarkeit des Axioms der Paarung und des Axioms der Vereinigung im Bereich der endlichen Mengen.

In ganz analoger Weise wie für den Bereich $\mathfrak{R}$ läßt sich auch für den Bereich $\mathfrak{E}$ der endlichen Mengen das Axiom der Paarung

1) Fraenkel, III, § 2, Nr. 4.

und das Axiom der Vereinigung gleichzeitig aus den übrigen Axiomen herleiten. Unter dem Bereich $\mathfrak{E}$ sei dabei der wie folgt definierte Bereich verstanden:

Definition 1: Unter dem Bereich der endlichen Mengen verstehen wir den Bereich $\mathfrak{E}$, in dem alle und nur die Mengen existieren, die aus der Nullmenge durch Anwendung der Axiome III bis VI gebildet werden können.

Die Definition ist ganz entsprechend der im § 1 des II. Kapitels gegebenen Definition des Bereiches $\mathfrak{N}$ gebildet. Im Bereiche $\mathfrak{E}$ ist nur das Axiom VII nicht erfüllt[1]). Übrigens ist leicht zu sehen, daß $\mathfrak{E}$ der „kategorische" Bereich der aus den ersten sechs Axiomen folgenden Mengenlehre ist, falls man als siebentes Axiom die Forderung der Existenz überhaupt einer Menge hinzufügt.

Definition 2: Ist $\varkappa$ irgend eine natürliche Zahl und die Menge $U_\varkappa$ als Potenzmenge von $U_{\varkappa-1}$, insbesondere $U_0 = \mathfrak{U}0 = \{0\}$ als Potenzmenge der Nullmenge definiert, so heißt eine Menge des Bereiches $\mathfrak{E}$ von der Ordnung $\varkappa$, falls sie Element von $U_\varkappa$, aber nicht Element einer Menge U_λ für $\lambda < \varkappa$ ist.

Natürlich ist der hier gegebene Begriff der Ordnung ein andrer, als wir ihn für den Bereich $\mathfrak{N}$ benutzt hatten. Während früher alle Elemente von Z_0 die Ordnung Null besaßen, gibt es hier nur eine einzige Menge von der Ordnung Null, die Nullmenge.

In vollkommener Analogie mit den entsprechenden Betrachtungen für den Bereich $\mathfrak{N}$ ergeben sich hier die beiden folgenden Sätze:

Satz 1: Die Menge U_n enthält alle die Mengen des Bereiches $\mathfrak{E}$, deren Ordnung kleiner als n oder gleich n ist, als Elemente.

Beweis durch vollständige Induktion: Der Satz sei erwiesen für alle $n \leqq m$. U_m enthält dann alle Mengen des Bereiches $\mathfrak{E}$, deren Ordnung $\varkappa \leqq m$ ist. Der Satz gilt dann auch noch für $n = m+1$. Denn ist M_λ irgendeine Menge von der Ordnung $\lambda \leqq m$, so ist $M_\lambda \varepsilon U_m$ oder, was dasselbe bedeutet: M_λ Teilmenge von U_{m-1}. Die Elemente von M_λ sind daher Elemente von U_{m-1} und somit höchstens von der Ordnung $m-1$. Wir können also wegen der gemachten Voraussetzung auf die Elemente von M_λ den Satz 1 anwenden und finden, daß die Elemente von M_λ auch Elemente von U_m sind. Dann ist aber M_λ Teilmenge von U_m und Element von U_{m+1}.

Nun gilt Satz 1 sicher für die ersten Glieder $U_0, U_1, U_2, \ldots$, wie sich durch Anschreiben der Mengen sofort ergibt. Er gilt also auch für jedes beliebige U_n, wo n irgendeine natürliche Zahl ist.

1) Der Nachweis, daß alle Mengen des Bereiches $\mathfrak{E}$ endlich sind, soll an dieser Stelle nicht geführt werden; vgl. dazu das V. Kapitel.

Satz 2: Jede Menge des Bereiches $\mathfrak{E}$ ist von bestimmter endlicher Ordnung.

Beweis: Der Satz ist bewiesen, wenn gezeigt werden kann: Ist eine Menge $M_\varkappa$ von der Ordnung $\varkappa$ gegeben, so ist ihre Vereinigungsmenge, Potenzmenge, sowie jede Teilmenge und jede Auswahlmenge von bestimmter endlicher Ordnung. — Ist zunächst $\varkappa \geqq 2$, so ist $M_\varkappa \varepsilon U_\varkappa$ oder $M_\varkappa$ Teilmenge von $U_{\varkappa-1}$. Jedes Element von $M_\varkappa$ ist daher in $U_{\varkappa-1}$ enthalten. Ebenso läßt sich schließen, daß alle Elemente der Elemente von $M_\varkappa$ in $M_{\varkappa-2}$ enthalten sind. Wörtlich wie in Satz 2 von § 1 des vorigen Kapitels ergibt sich daraus, daß $\mathfrak{S} M_\varkappa$ von der Ordnung $\varkappa - 1$ ist. Ist $\varkappa = 0$, so ist $M_\varkappa = 0$ und $\mathfrak{S} M_\varkappa = 0$, also von der Ordnung 0; ist $\varkappa = 1$, so ist $M_\varkappa = \{0\}$ und $\mathfrak{S} M_\varkappa = 0$, also wieder von der Ordnung 0. Damit sind für die Bildung der Vereinigungsmenge alle vorkommenden Fälle erledigt. Ganz analog den Betrachtungen des vorigen Kapitels ergibt sich dann der Beweis für die übrigen Axiome.

Zunächst ergibt sich aus den beiden Sätzen, daß zu zwei beliebigen Mengen des Bereiches $\mathfrak{E}$ eine Menge U_n existiert, die die beiden Mengen als Elemente enthält. Mit Satz 2 des § 2, Kap. II folgt daraus die Abhängigkeit des Axioms der Paarung.

Die Abhängigkeit des Axioms der Vereinigung ergibt sich entsprechend dem vorigen Paragraphen. Ist $M_\varkappa$ irgendeine Menge des Bereiches $\mathfrak{E}$, so daß also $M_\varkappa \varepsilon U_\varkappa$ gilt, so ergibt sich zunächst, daß $\mathfrak{S} M_\varkappa$ Teilmenge von $U_{\varkappa-2}$ ist (wobei natürlich der Index von $U_{\varkappa-2}$ nicht kleiner als Null werden darf). Dann läßt sich das Verfahren des vorigen Paragraphen anwenden, und $\mathfrak{S} M_\varkappa$ ergibt sich als Aussonderungsmenge von $U_{\varkappa-2}$ ohne Benutzung der Axiome II und III. Damit erhalten wir den

Hauptsatz: Im Bereiche $\mathfrak{E}$ sind die Axiome der Paarung und der Vereinigung gleichzeitig aus den übrigen Axiomen beweisbar.

§ 3.

Unabhängigkeit des Axioms der Vereinigung in einem weiteren Bereich.

Es ist nach den beiden vorhergehenden Paragraphen klar, daß ein Unabhängigkeitsbeweis für das Axiom der Vereinigung nur dann möglich ist, wenn der Bereich der betrachteten Mengen über den Bereich $\mathfrak{R}$ hinaus ausgedehnt wird. Wird diese Erweiterung etwa durch die im Kap. II, § 2 erwähnte verallgemeinerte Fassung VII a des Axioms VII vorgenommen, so existiert zunächst, falls wir in VII a $m = 0$ und $\varphi(x) = \{x\}$ setzen, eine Menge Z, die genau dieselben Eigenschaften besitzt, wie die durch die gewöhnliche

Fassung des Axioms VII geforderte Menge. Daraus läßt sich dann nach Fraenkel, III, § 4 die Existenz der Menge Z_0 beweisen.

Setzen wir ferner in Axiom VIIa statt m die Menge Z_0 ,und wählen wir für $\varphi(x)$ die Funktion $\mathfrak{U}x$, so existiert eine Menge, die Z_0 enthält und zu jedem ihrer Elemente a auch die Potenzmenge desselben $\mathfrak{U}a$ zum Element hat. Ist M eine beliebige Menge, welche diese Eigenschaften besitzt, so kann man ganz analog dem Wege, auf dem in Fraenkel, III, die Existenz der Menge Z_0 bewiesen ist, die Existenz der Menge $M_0 = \{Z_0, Z_1, Z_2, \ldots\}$ nachweisen. M_0 ist nämlich der Durchschnitt aller Teilmengen von M, die den verlangten Eigenschaften ebenfalls Genüge leisten.

Sodann läßt sich die Äquivalenz von M_0 mit Z_0 beweisen. Es sei etwa P die Verbindungsmenge von M_0 und Z_0, wo also P lauter Paarmengen enthält, die je ein Element von M_0 und Z_0 besitzen. Alle Teilmengen von P, die $\{0, Z_0\}$ als Element enthalten und zu jedem ihrer Elemente $\{m, Z_\varkappa\}$ auch noch $\{\{m\}, Z_{\varkappa+1}\}$ als Element enthalten, bilden eine Teilmenge U'' von $\mathfrak{U}P$. Indem wir nämlich y die Elemente von $\mathfrak{U}P$ durchlaufen lassen, bilden wir zunächst die Teilmenge: $U' = (\mathfrak{U}P)_{\{0, Z_0\} \varepsilon y}$. Jetzt sei η ein beliebiges Element von U' und x durchlaufe die Elemente von η. Jedes x ist von der Form $\{m, Z_\varkappa\}$ und wir fassen $\{\{m\}, \mathfrak{U}Z_\varkappa\}$ als Funktion von x auf, die wir mit $\varphi(x)$ bezeichnen[1]). $\eta' = \eta_{\varphi(x) \varepsilon \eta}$ ist dann eine bestimmte Teilmenge von η, die bei variablem η Funktion von η ist. Bilden wir schließlich $U'' = U'_{\eta' = \eta}$, d. h. diejenige Teilmenge von U', für deren Elemente η stets $\eta' = \eta$ ist, so enthält U'' alle die Teilmengen von P, die den gewünschten Bedingungen genügen, als Elemente. Es soll bewiesen werden, daß der Durchschnitt $\mathfrak{D}U''$ aller Elemente von U'' eine Abbildung zwischen M_0 und Z_0 darstellt.

Zunächst kann $\mathfrak{D}U''$ nur ein Element p_0 enthalten, in dem Z_0 als Element vorkommt: $p_0 = \{0, Z_0\}$; wäre noch ein zweites Element dieser Art, etwa $p'_0 = \{m, Z_0\}$ vorhanden, so wäre $\mathfrak{D}U'' - \{p'_0\}$ eine Teilmenge von P, die gleichfalls den angegebenen Bedingungen genügt, und $\mathfrak{D}U''$ könnte dann nicht Durchschnitt aller dieser Teilmengen von P sein. Ferner läßt sich zeigen, daß, falls $Z_{\varkappa-1}$ nur in einem Element $p_{\varkappa-1}$ vorkommt, auch $Z_\varkappa$ nur in einem einzigen vorkommen kann. Setzen wir $p_{\varkappa-1} = \{m, Z_{\varkappa-1}\}$, so ist nämlich $p_\varkappa = \{\{m\}, Z_\varkappa\}$ sicher Element von $\mathfrak{D}U''$. Falls nun ein $p'_\varkappa =$

1) Dies ist stets möglich; denn sowohl $\varphi_1(x) = m$ als auch $\varphi_2(x) = Z_\varkappa$ sind aus Z_0 bezw. M leicht mit dem Axiom der Aussonderung zu bilden, und dann ist natürlich auch $\varphi(x) = \{\{\varphi_1(x)\}, \mathfrak{U}\varphi_2(x)\}$ eine Funktion von x.

$\{n, Z_\varkappa\} \neq p_\varkappa$ in $\mathfrak{D}U''$ existierte, so würde wieder $\mathfrak{D}U'' - \{p'_\varkappa\}$ den Bedingungen genügen, was mit der Eigenschaft des Durchschnitts unverträglich ist. Durch vollständige Induktion folgt daraus, daß jedes $Z_\varkappa$ genau einmal auftritt. Auf genau dieselbe Weise läßt sich zeigen, daß jedes Element von Z_0 genau in einem Element von $\mathfrak{D}U''$ als Element auftritt. $\mathfrak{D}U''$ stellt also tatsächlich eine Abbildung zwischen M_0 und Z_0 her.

Aus der Äquivalenz von M_0 und Z_0 ergibt sich dann leicht, daß auch $\mathfrak{U}M_0$ äquivalent Z_1, $\mathfrak{U}\mathfrak{U}M_0$ äquivalent Z_2 usw. ist. Betrachtet man nun den Bereich von Mengen, der sich aus M_0 durch Anwendung der Axiome mit Ausnahme des Axioms der Vereinigung ergibt, so gibt es in dem so gebildeten Bereiche keine Menge, die nicht einer Menge $Z_\varkappa$ bezw. einer Teilmenge einer solchen äquivalent ist. Denn die Axiome der Aussonderung und der Auswahl gestatten offenbar nicht die Bildung einer Menge von größerer Mächtigkeit, als sie die Ausgangsmenge besitzt. Mit dem Axiom der Paarung können nur Mengen mit zwei Elementen gebildet werden. Es bleibt also nur das Axiom der Potenzmenge zur Bildung von Mengen höherer Mächtigkeit übrig. Da wir aber dabei stets von einer Menge ausgehen, die einem bestimmten $Z_\varkappa$ bezw. einer Teilmenge davon äquivalent ist, so ist jede Menge des betrachteten Bereiches ebenfalls einem bestimmten $Z_\varkappa$ bezw. einer Teilmenge davon äquivalent.

Lassen wir aber das Axiom der Vereinigung in dem betrachteten Bereiche ebenfalls zu, so können wir die Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}M_0$ von M_0 bilden. Es gibt sicher in dem eben betrachteten Bereiche keine Menge, die von gleicher Mächtigkeit wie $\mathfrak{S}M_0$ ist. Denn wie auch $Z_\varkappa$ gewählt werden möge, stets enthält $\mathfrak{S}M_0$ noch die Menge $\mathfrak{U}Z_\varkappa$, also eine Menge von größerer Mächtigkeit als $Z_\varkappa$, als Teilmenge. Andrerseits ist aber in dem oben betrachteten Bereich jede Menge einer bestimmten Menge $Z_\varkappa$ bezw. einer Teilmenge davon äquivalent.

Man gelangt also in dem aus der Menge M_0 durch Anwendung der Axiome II und IV bis VI zu bildenden Bereich mit Hilfe des Axioms der Vereinigung zu Mengen, deren Existenz ohne das Axiom III nicht gesichert ist. Das Axiom der Vereinigung ist daher von den übrigen Axiomen unabhängig.

IV. Kapitel: Der Unabhängigkeitsbeweis für das Axiom der Potenzmenge.

Nach dem Vorschlage Fraenkels [1]) kann der Unabhängigkeitsbeweis für das Axiom der Potenzmenge geführt werden mit Hilfe eines Bereiches, der nur endliche und abzählbar unendliche Mengen umfaßt. Man hat zu diesem Zweck zu zeigen, daß sich ohne Benutzung des Axioms der Potenzmenge aus abzählbar unendlichen Mengen, insbesondere etwa aus der nach Axiom VII existierenden Menge Z_0, stets nur Mengen bilden lassen, die wieder abzählbar unendlich oder endlich sind. Bezüglich der Verwendung der Axiome II, V und VI ist dies ohne weiteres ersichtlich. Schließen wir die „Erweiterungs"axiome VII a und VIII vorläufig von der Betrachtung aus, so erfordert demnach nur das Axiom der Vereinigung eine eingehendere Behandlung. Es genügt jedenfalls nachzuweisen, daß die Vereinigungsmenge einer endlichen oder abzählbar unendlichen Menge, deren Elemente sämtlich ebenfalls endliche oder abzählbar unendliche Mengen sind, selbst wieder endlich oder höchstens abzählbar unendlich ist. Das Ziel der folgenden Untersuchung ist, den Beweis dieses bekannten Satzes der Axiomatik einzugliedern.

Unter einer abzählbar unendlichen Menge verstehen wir im Folgenden eine Menge, die der Menge Z_0 äquivalent ist [2]). Unter der Menge P_0 sei die Menge aller Paare verstanden, die Teilmengen von Z_0 sind, oder anders ausgedrückt: P_0 ist die Menge aller Paare von Elementen aus Z_0 [3]). Dann gilt zunächst der:

Satz 1: Die Vereinigungsmenge einer abzählbar unendlichen Menge, deren Elemente sämtlich abzählbar unendliche Mengen sind, ist äquivalent einer Teilmenge von P_0.

Beweis: M sei die beliebig gegebene abzählbar unendliche Menge; die Elemente von M seien gleichfalls abzählbar unendliche Mengen. Wir wollen der Einfachheit halber voraussetzen, daß die Elemente von M untereinander paarweise elementefremd sind, und ferner wollen wir annehmen, daß sowohl M als auch $\mathfrak{S}M$ zu der Menge P_0 elementefremd sind. Ist dies letzte nicht erfüllt, so kann man eine Menge $M' \sim M$ [4]) so finden, daß die Elemente von M und M' paarweise einander äquivalent sind, und daß außerdem M'

1) Mengenlehre, S. 225.

2) Fraenkel, III, § 4, Definition 2.

3) Es wird natürlich nicht vorausgesetzt, daß die Existenz von P_0 (ohne das Axiom der Potenzmenge) bewiesen sei.

4) $\sim$ bedeutet wie üblich „äquivalent".

sowie alle Elemente von M' zu gewissen gegebenen Mengen (hier zu P_0) elementefremd sind [1]). Es ist dann $\mathfrak{S}M$ äquivalent $\mathfrak{S}M'$ und Satz 1 kann mit Hilfe von M', für welche Menge die Voraussetzung zutrifft, bewiesen werden.

Da M äquivalent Z_0 ist, so existiert eine Abbildung Ω zwischen M und Z_0 derart, daß jedem Element von M eindeutig ein Element von Z_0 und umgekehrt zugeordnet ist. Ist b_m dasjenige Element von M, dem durch die Abbildung Ω das Element m von Z_0 entspricht, so besagt das: $\{m, b_m\}$ ist Element von Ω, wobei weder m noch b_m in irgendeinem andern Element von Ω vorkommen.

Ferner verstehen wir unter der Endstrecke r_m von Z_0 diejenige Teilmenge von Z_0, die mit $\{m\}$ beginnend zu jedem ihrer Elemente x das folgende $\{x\}$ enthält; r_m ist abzählbar unendlich, d. h. äquivalent Z_0 [2]). Wir können daher zwischen b_m und r_m eine Abbildung Ω_m (= $r_m . b_m$ [3]) herstellen, so daß jedem Element $\beta_n^{(m)} \varepsilon b_m$ ein bestimmtes Element $n \varepsilon r_m$ zugeordnet ist. Dem Element $\beta_n^{(m)}$ entsprechen somit zwei Elemente m und n von Z_0; dabei ist stets $m \neq n$, denn nach Fraenkel, IV, § 4 enthält r_m nicht m als Element. Wir können nun das zu $\beta_n^{(m)}$ gehörige Paar $\{m, n\}$ als Funktion von $\beta_n^{(m)}$ auffassen. Legen wir nämlich, was nach dem oben Ausgeführten möglich ist, die beliebig aber bestimmt gewählten Abbildungen Ω und Ω_m — für jeden vorkommenden Index m — zugrunde, so ist:

$$\{n\} = Z_0\{y, \beta_n^{(m)}\}\varepsilon\Omega_m,$$

wobei y die Elemente von Z_0 durchläuft. Lassen wir $\beta_n^{(m)}$ variabel, so wird $n = \mathfrak{S}\{n\}$ damit Funktion von $\beta_n^{(m)}$:

$$n = \varphi_1(\beta_n^{(m)}). \tag{1}$$

Genau ebenso ist:

$$\{m\} = Z_0\{y, b_m\}\varepsilon\Omega, \tag{2}$$

wo y wieder die Elemente von Z_0 durchläuft. Hierbei ist aber b_m Funktion von $\beta_n^{(m)}$; denn es ist $\{b_m\} = M_{\beta_n^{(m)} \varepsilon x}$, wo x die Elemente von M durchläuft; daher bei variablem $\beta_n^{(m)}$: $b_m = \mathfrak{S}\{b_m\} = f(\beta_n^{(m)})$. In die Darstellung (2) für $\{m\}$ geht daher b_m als Funktion von $\beta_n^{(m)}$ ein, und wir können somit m selbst lediglich als Funktion von $\beta_n^{(m)}$ betrachten:

$$m = \varphi_2(\beta_n^{(m)}). \tag{3}$$

1) Fraenkel, III, Nr. 21.

2) Genauere Definition von r_m und Beweise s. Fraenkel, IV, § 4, Nr. 44.

3) Mit $r_m . b_m$ wird in üblicher Weise die Verbindungsmenge von r_m und b_m bezeichnet, das Zeichen =(bedeutet „Teilmenge von“.

Dann ist aber endlich auch:

$$(4) \qquad \{m, n\} = \{\varphi_1(\beta_n^{(m)}), \varphi_2(\beta_n^{(m)})\} = \varphi(\beta_n^{(m)})$$

eine Funktion von $\beta_n^{(m)}$.

Die hiermit definierte Funktion φ gibt bei festgewählten Abbildungen $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}_m$ eine Abbildung von $\mathfrak{S}M$ auf eine Teilmenge von P_0; d. h. sind β und β' irgend zwei verschiedene Elemente von $\mathfrak{S}M$, so ist auch $\varphi(\beta) \neq \varphi(\beta')$. Betrachten wir die möglichen Fälle:

a) β und β' seien die Elemente zweier verschiedener Elemente von M; also etwa $\beta \varepsilon b$, $\beta' \varepsilon b'$, wo b und b' verschiedene Elemente von M sind. Dann sind aber die vermöge der Abbildung $\mathfrak{Q}$ den Elementen b und b' zugehörigen Elemente m und m' von Z_0 ebenfalls von einander verschieden. $\varphi(\beta) = \{m, n\}$ und $\varphi(\beta') = \{m', n'\}$ könnten daher nur dann gleich sein, wenn $n = m'$ und gleichzeitig $n' = m$ wäre; das ist aber nicht möglich. Denn von den beiden Mengen r_m und $r_{m'}$, auf welche b und b' abgebildet sind, ist wegen der Verschiedenheit von m und m' stets die eine echte Teilmenge der andern[1]). Nehmen wir an, es sei in der „natürlichen Ordnung" etwa $m \prec m'$, so ist m keinesfalls Element von $r_{m'}$. Daher kann auch n', das ja in der Abbildung $\mathfrak{Q}_{m'}$ vorkommt, also Element von $r_{m'}$ ist, nicht gleich m sein. Also ist wirklich $\varphi(\beta) \neq \varphi(\beta')$.

b) Nehmen wir nun an, β und β' seien Elemente desselben Elementes b von M, so entspricht ihnen vermöge der Abbildung $\mathfrak{Q}$ auch dasselbe Element m von Z_0. Aber die Elemente n und n', die ihnen vermöge der Abbildung $\mathfrak{Q}_m$ von b auf Z_0 entsprechen, sind verschieden. Also ist auch in diesem Falle $\varphi(\beta) \neq \varphi(\beta')$.

Die Verbindungsmenge $\mathfrak{S}M.P_0$ enthält nun lauter Elemente von der Form $x = \{\beta, \{m, \bar{n}\}\}$, worin β die Elemente von $\mathfrak{S}M$, und $\bar{m}$ bezw. $\bar{n}$ die Elemente von Z_0 durchlaufen, wobei stets $\bar{m} \neq n$ ist. Dann ist $\{\beta\} = (\mathfrak{S}M)_{y \varepsilon x}$, wo y die Elemente von $\mathfrak{S}M$ durchläuft, also $\beta = \mathfrak{S}\{\beta\}$ bei variablem x eine Funktion von x, die wir ψ nennen, so daß $\beta = \psi(x)$ wird.

Stellt ferner φ die durch (4) definierte Funktion dar, so ist $\varphi(\beta) = \varphi\{\psi(x)\} = \{m, n\}$ ebenfalls eine Funktion von x und ebenso $\chi(x) = \{\psi(x), \varphi(\psi(x))\} = \{\beta, \{m, n\}\}$ eine Funktion von x.

Schließlich definieren wir eine Abbildung Ω^* zwischen $\mathfrak{S}M$ und P_0 durch:

$$\Omega^* = (\mathfrak{S}M.P_0)_{\chi(x) = x}.$$

Ω^* enthält alle die Elemente x von $\mathfrak{S}M.P_0$, die die Form $\{\beta, \varphi(\beta)\}$ besitzen; denn nur für diese ist $\chi(x) = x$. In Ω^* kommt daher

1) Siehe Fraenkel, IV, Nr. 47, wo die „natürliche" Wohlordnung von Z_0 bewiesen ist.

jedes $\beta \varepsilon \mathfrak{S} M$ genau einmal vor. Dann kann aber, da für verschiedene β die zugehörigen $\varphi(\beta) = \{m, n\}$ gleichfalls verschieden sein müssen, jedes $\{m, n\} \varepsilon P_0$ höchstens einmal in Ω^* auftreten. Ω^* gibt daher eine Abbildung zwischen $\mathfrak{S} M$ und einer Teilmenge von P_0, d. h. es ist $\mathfrak{S} M \sim \mathsf{T} =(P_0$.

Ehe wir nun dazu übergehen, den entscheidenden Satz zu beweisen, daß P_0 und Z_0 äquivalent sind, daß also eine Doppelfolge abgezählt werden kann, müssen wir einen Hilfssatz ableiten, der die Arbeit Fraenkels über die Wohlordnung der Menge Z_0 nach einer Richtung ergänzt [1]).

Hilfssatz: Zu jedem von m verschiedenen Elemente n des Endstückes r_{m^-} von Z_0, wobei unter m^- das Element $m^- \varepsilon m$ von Z_0 verstanden wird, gibt es eine einzige Menge $a_{m,n}$ von folgenden Eigenschaften:

1) m und n^- sind Elemente von $a_{m,n}$;

2) ist $x \neq n^-$ Element von $a_{m,n}$, so ist auch $\{x\} \varepsilon a_{m,n}$;

3) ist $\bar{a}_{m,n}$ eine beliebige Menge mit den Eigenschaften 1) und 2), so ist $a_{m,n} =(\bar{a}_{m,n}$.

$a_{m,n}$ ist eine endliche Teilmenge von r_{m^-}; es gilt die Beziehung: $a_m + a_{m,n} = a_n$. Zu jeder Anfangsstrecke a_p von Z_0 existiert bei gegebenem m ein und nur ein $a_{m,q}$, so daß $a_p \sim a_{m,q}$ ist.

Beweis: Die Existenz der Menge $a_{m,n}$, die den Eigenschaften 1) bis 3) genügt, sowie ihre Endlichkeit folgt analog wie in Fraenkel, IV, Nr. 45 die Existenz von a_m als endlicher Anfangsstrecke von Z_0.

Die Beziehung $a_m + a_{m,n} = a_n$ ist dann folgendermaßen zu beweisen. Erstens enthält $a_m + a_{m,n}$ die Elemente 0 und n^-. Ist zweitens $x \neq n^-$ Element von $a_m + a_{m,n}$, so ist entweder $x \varepsilon a_m$; dann ist aber, falls $x \neq m^-$, sicher $\{x\} \varepsilon a_m$, falls $x = m^-$, $\{x\} \varepsilon a_{m,n}$. Oder es ist $x \varepsilon a_{m,n}$, und dann ist wegen 2) auch $\{x\} \varepsilon a_{m,n}$. Ist also $x \neq n^-$ Element von $a_m + a_{m,n}$, so ist stets auch $\{x\} \varepsilon (a_m + a_{m,n})$. $a_m + a_{m,n}$ genügt daher den Bedingungen 1 und 2 in Fraenkel, IV, Nr. 45; wegen der dortigen Bedingung 3 ist daher:

$$a_n =(a_m + a_{m,n}. \tag{1}$$

Ferner genügt $a_n - a_m$ den obigen Bedingungen 1) und 2). Nach Fraenkel, IV, Nr. 47 folgt zunächst: $a_m \subset a_n$; da also m^- als Element von a_m auch in a_n vorkommt, so ist auch $m \varepsilon a_n$, und damit, weil $m \varepsilon a_m$ ist, auch $m \varepsilon (a_n - a_m)$; ebenso gilt, wie sofort zu

1) Fraenkel, IV, § 4, wonach auch die hier benutzte Bezeichnungsweise gewählt ist.

sehen ist, $n^- \varepsilon (a_n - a_m)$. Ist weiter $x \neq n^-$ Element von $a_n - a_m$, so ist sicher $x \varepsilon a_n$ und damit $\{x\} \varepsilon a_n$. Es kann aber nicht $\{x\} \varepsilon a_m$ sein, da ja $x \varepsilon a_m$ unmöglich ist. Denn sonst würde die Menge $a_m - \{\{x\}\}$ den Bedingungen 1 und 2 in Fraenkel, IV, Nr. 45, genügen, was aber mit Bedingung 3 in Widerspruch steht. Daraus folgt: $\{x\} \varepsilon (a_n - a_m)$, d. h. $a_n - a_m$ genügt auch der Bedingung 2). Daher ist wegen 3)

$$(2) \qquad a_{m,n} =\!= a_n - a_m \quad \text{oder} \quad a_m + a_{m,n} =\!= a_n.$$

Die Beziehungen (1) und (2) ergeben schließlich nach Axiom I: $a_n = a_m + a_{m,n}$.

Jetzt ist noch zu zeigen, daß bei festem m zu jeder Anfangsstrecke a_y von Z_0 ein $a_{m,x}$ existiert, so daß $a_y \sim a_{m,x}$ ist. Wählen wir ein bestimmtes y und ein bestimmtes x, so existiert nach Fraenkel, III, § 3 die Menge aller Abbildungen zwischen a_y und $a_{m,x}$, die mit X bezeichnet werde. Es möge nun R_m die Menge aller $a_{m,x}$ sein, wobei x die sämtlichen Elemente von r_{m^-} durchläuft; R_m läßt sich analog der Menge Z in Fraenkel, IV, Nr. 47 bilden. Bei variablem $a_{m,x}$ ist X offenbar Funktion von $a_{m,x}$. Ist für ein $a_{m,x}$ die zugehörige Menge $X \neq 0$, so heißt das, es existiert mindestens eine Abbildung zwischen dem festgewählten a_y und $a_{m,x}$ oder: $a_y \sim a_{m,x}$. $F(y) = R_{m\,X \neq 0}$ ist somit die Menge aller $a_{m,x}$, die dem festgewählten a_y äquivalent sind; dabei durchläuft die in X eingehende Variable $a_{m,x}$ alle Elemente von R_m. Bleibt y selbst variabel, so geht y in X als Variable ein, und daher ist $F(y)$ Funktion von y. Ist die Forderung, daß irgendein $a_{m,x} \sim a_y$ existiert, erfüllt, so bedeutet das: $F(y)$ ist nicht leer. Nun ist sicher $F(1) \neq 0$, nämlich gleich $\{\{m\}\}$, wobei $\{0\} = 1$ gesetzt ist; ebenso ergibt sich $F(2) \neq 0$, nämlich gleich $\{\{m, m^+\}\}$, wobei $\{\{0\}\} = 2$ gesetzt ist. Allgemein folgt aus $F(p) \neq 0$ auch $F(p^+) \neq 0$. Denn ist $a_{m,n} \sim a_p$, so ist doch $a_{m,n} + \{n\} \sim a_p + \{p\}$, oder was dasselbe besagt: $a_{m,n^+} \sim a_{p^+}$. Nach Fraenkel, IV, Nr. 48 kann man daher schließen, daß für alle Elemente y von Z_0 mit Ausnahme der Null stets $F(y) \neq 0$ ist, daß also zu jedem Abschnitt von Z_0 ein äquivalenter Abschnitt von r_{m^-} existiert. $F(y)$ enthält übrigens nur ein einziges Element; denn wären $a_{m,n}$ und $a_{m,n'}$ verschieden und beide äquivalent a_p, so müßte eine von beiden echte Teilmenge der andern sein. (Das folgt aus $a_{m,n} = a_n - a_m$ und $a_{m,n'} = a_{n'} - a_m$, wenn man berücksichtigt, daß von a_n und $a_{n'}$ eines echte Teilmenge des andern sein muß.) Daraus folgt wegen der Endlichkeit beider ein Widerspruch. Es ist also unmöglich, bei festem m zwei verschiedene $a_{m,n}$ zu finden, die einem gegebenen a_p äquivalent sind. Damit ist der Hilfssatz in allen Teilen bewiesen.

Es sei A die nach Fraenkel, IV, § 4 existierende Menge aller Anfangsstrecken a_y von Z_0. Das Element y von Z_0 kann als Funktion von a_y betrachtet werden. Setzen wir $a_y = \eta$, so wird nämlich $y = \eta\{x\}_{\bar{\varepsilon}}\eta$, wo x die Elemente von η durchläuft. (y ist die Teilmenge von η, die $y_{\dot{-}}$ als einziges Element enthält.) Wir setzen $y = \psi(\eta)$ und bilden $A_m = A_{\psi(\eta)\,\varepsilon\,a_m} + \{a_m\}$, wobei η die Elemente von A durchläuft, während a_m ein bestimmtes Element von A bedeutet. A_m enthält alle und nur die Anfangsstrecken von Z_0, die Teilmengen von a_m sind. Zu der Menge A_m existiert weiter nach Fraenkel, III, Nr. 21 eine Menge B_m, die zu Z_0 elementefremd ist, und deren Elemente zu Z_0 und untereinander elementefremd sind, von der Art, daß $B_m \sim A_m$ und ferner jedes Element von B_m einem Element von A_m äquivalent ist. Es soll gezeigt werden, daß $\mathfrak{S}B_m$ einem bestimmten Abschnitt $a_{\bar{m}}$ äquivalent ist, und daß das den Abschnitt a_m bestimmende Element eindeutig bestimmt und Funktion von m ist.

Daß a_m eindeutig bestimmt ist, falls es überhaupt existiert, folgt leicht. Denn aus $\mathfrak{S}B_m \sim a_{\bar{m}}$ und $\mathfrak{S}B_{m'} \sim a_{\bar{m}'}$ folgt ja $a_{\bar{m}} \sim a_{\bar{m}'}$, was wegen der Endlichkeit beider und wegen ihrer Eigenschaft als Abschnitte von Z_0 nur dann erfüllt sein kann, wenn $\bar{m} = \bar{m}'$ ist. Ferner soll die Existenz von $a_{\bar{m}}$ für jedes $m \varepsilon Z_0$ induktiv nachgewiesen werden. Ist a_m der auf die oben angegebene Weise zu m (bezw. zu der von m abhängigen Menge A_m) gehörige Abschnitt, so entsteht der zu m^+ gehörige Abschnitt $a_{\overline{m^+}}$ in folgender Weise: Wir können eine Menge $b_{m^+} \sim a_{m^+}$ finden, wo b_{m^+} zu B_m und seinen Elementen sowie zu Z_0 elementefremd ist. Dann ist offenbar $B_{m^+} = B_m + \{b_{m^+}\}$ eine Menge, die in Bezug auf A_{m^+} dieselben Bedingungen erfüllt, wie B_m bezüglich A_m. Nun ist aber $\mathfrak{S}B_{m^+} = \mathfrak{S}B_m + b_{m^+}$; also folgt aus $\mathfrak{S}B_m \sim a_m$ und aus dem soeben bewiesenen Hilfssatz, nach welchem ein $a_{m,\,\overline{m^+}}$ existiert, so daß $a_{m,\,\overline{m^+}} \sim a_{m^+}$ und somit auch $a_{\bar{m},\,\overline{m^+}} \sim b_{m^+}$ ist: $\mathfrak{S}B_{m^+} = \mathfrak{S}B_m + b_{m^+} \sim a_{\bar{m}} + a_{\bar{m},\,\overline{m^+}} = a_{\overline{m}}$. Fassen wir $a_{\bar{m}}$ als Funktion von m auf, was — wie hier nicht ausgeführt sei — dadurch geschehen kann, daß man gemäß Fraenkel, III, Nr. 21 für die Bildung der Menge B_m eine bestimmte Vorschrift gibt, so folgt wieder durch vollständige Induktion nach Fraenkel, IV, Nr. 48, daß zu jedem $m \varepsilon Z_0^{\cdot}$ ein derartiger Abschnitt $a_{\bar{m}}$ existiert, wobei $a_{\bar{m}}$ Funktion von m ist.

Ist weiter $\{m, n\}$ irgendein Paar von Elementen aus Z_0, wobei die Bezeichnung so gewählt werde, daß $a_n = (\subset a_m$ ist, so existiert nach dem Hilfssatz $a_{\bar{m},\,q} \sim a_n$, und daher ist $a_{\bar{m}} + a_{\bar{m},\,q} = a_q$, welches nur von m und n abhängt, eine Funktion von $\{m, n\}$. Dann ist aber auch q selbst eine Funktion des Paares $\{m, n\}$: $q = \varphi(\{m, n\})$.

Zur Verbindungsmenge $Z_0 . P_0$ existiert also ganz analog S. 33 eine Teilmenge $\mathfrak{Q} \subset Z_0 . P_0$, deren Elemente die Form $\{q, \{m, n\}\}$ besitzen, wobei stets $q = \varphi(\{m, n\})$ ist. $\mathfrak{Q}$ ist eine Abbildung von P_0 auf eine Teilmenge von Z_0. Denn ist $\{m, n\} \neq \{m', n'\}$, so ist stets auch $\varphi(\{m, n\}) \neq \varphi(\{m', n'\})$. Denn es sei

1) $m \neq m'$, so ist wegen der gewählten Bezeichnung: $a_n \subset a_m$ und $a_{n'} \subset a_{m'}$. Von den Abschnitten a_m und $a_{m'}$ ist gleichfalls der eine echte Teilmenge des andern, also etwa: $a_m \subset a_{m'}$. Dann ist aber auch A_m echte Teilmenge von $A_{m'}$. $A_{m'}$ enthält daher außer den Elementen von A_m noch mindestens ein Element, also a_{m^+}. Nun gilt aber nach S. 36: $a_{\overline{m}} + a_{\overline{m, m^+}} = a_{\overline{m^+}}$, wobei $a_{\overline{m, m^+}} \sim a_{m^+}$ ist. Da nun $a_n \subset a_m$, also erst recht echte Teilmenge von a_{m^+} ist, so gilt, falls $a_{\overline{m, q}} \sim a_n$ gewählt wird: $a_{\overline{m}} + a_{\overline{m, q}} = a_q \subset a_{\overline{m^+}}$ oder: a_q ist echte Teilmenge von $a_{\overline{m^+}}$. Nun ist aber andrerseits $a_{\overline{m^+}} \subset a_{\overline{m'}}$, also erst recht $a_q \subset a_{\overline{m'}}$. Dabei war $q = \varphi(\{m, n\})$ die oben definierte Funktion. Setzen wir $q' = \varphi(\{m', n'\})$, so ist $a_{q'} = a_{\overline{m'}} + a_{\overline{m', q'}}$, wo $a_{\overline{m', q'}} \sim a_{n'}$ ist. Daher ist sicher a_q echte Teilmenge von $a_{q'}$ und somit $q \neq q'$.

2) Ist nun $m = m'$ und also $n \neq n'$, so folgt die Verschiedenheit von q und q' sofort aus dem Hilfssatz.

Es ist also wirklich P_0 auf eine Teilmenge von Z_0 durch $\mathfrak{Q}$ abgebildet. Andrerseits ist P_0 jedenfalls unendlich und besitzt also mindestens eine Teilmenge, die Z_0 äquivalent ist; daraus folgt:

Satz 2: Die Mengen Z_0 und P_0 sind äquivalent.

Aus Satz 1 und 2 folgt dann, daß die Vereinigungsmenge einer abzählbar unendlichen Menge mit lauter abzählbar unendlichen Elementen abzählbar ist. Man kann also von der Menge Z_0 ausgehend ohne das Axiom der Potenzmenge nicht zu einer nicht abzählbaren unendlichen Menge gelangen. Das Axiom der Potenzmenge ist also von den übrigen Axiomen unabhängig.

Auch bei Hinzuziehung des „Erweiterungs"axioms VIII gilt die Unabhängigkeit noch; denn gilt das Axiom der Potenzmenge nicht, so ist doch, falls wir den Bereich der abzählbar unendlichen und endlichen Mengen betrachten, stets $\varphi(x)$ eine abzählbar unendliche oder endliche Menge, falls x irgendeine Menge des Bereiches ist. Mittels Axiom VIII kann man also nur in einer abzählbaren Menge jedes Element durch eine höchstens wiederum abzählbare Menge ersetzen, und das führt, wie wir soeben bewiesen haben, nicht zu größeren Mächtigkeiten. Wir fassen unser Ergebnis zusammen:

Hauptsatz: Das Axiom der Potenzmenge ist von den übrigen Axiomen auch bei Hinzuziehung des Erweiterungsaxioms VIII unabhängig.

V. Kapitel: Die übrigen Axiome. Schlussbemerkungen.

Für das Axiom der Aussonderung ist der Unabhängigkeitsbeweis von Fraenkel gegeben[1]). Dieser Beweis, der das Zermelosche Axiomensystem zur Grundlage hat, gilt ohne weiteres auch für das Fraenkelsche System selbst. Denn über die spezielle Natur des Aussonderungsaxioms ist keinerlei Voraussetzung für den Beweis erforderlich. Fraenkel betrachtet dort einen Bereich von Mengen, in dem alle Axiome mit Ausnahme des Axioms der Aussonderung erfüllt sind, während z. B. die dem Bereich angehörende Menge Z_0 keine echten unendlichen Teilmengen besitzt. Nichtmengen kommen in dem betrachteten Bereiche nicht vor.

Der Unabhängigkeitsbeweis für das Axiom der Auswahl ist gleichfalls von Fraenkel geführt worden[2]). Dieser Beweis setzt wesentlich die Existenz einer abzählbaren Menge von Dingen voraus, welche selbst keine Mengen sind. Er ist somit nur für das Zermelosche Axiomensystem brauchbar. Eine unmittelbare Übertragung des Gedankenganges dieses Beweises auf das Fraenkelsche System gelingt nicht. Ein anderer Weg zur Durchführung dieses Unabhängigkeitsbeweises hat sich noch nicht gezeigt[3]).

Die Unabhängigkeit des Axioms des Unendlichen folgt aus den Ergebnissen einer Arbeit von Tarski: Sur les ensembles finis[4]). Die vom Verfasser seiner Arbeit zugrunde gelegte Definition der Endlichkeit einer Menge lautet in der Ausdrucksweise unserer Axiomatik folgendermaßen:

Definition: Eine Menge M ist endlich, wenn jede von der Nullmenge verschiedene Teilmenge T ihrer Potenzmenge $\mathfrak{U}M$ mindestens ein Element enthält, von dem keine echte Teilmenge in T als Element vorkommt.

Auf Grund dieser Definition werden dann folgende Sätze abgeleitet:

1) Die Nullmenge ist endlich. (Theorème 4.)[5])

2) Die Menge $\{a\}$ ist endlich. (Theorème 5.)

3) Sind A und B endliche Mengen, so ist auch $A + B$ (in der

---

1) Fraenkel, I, S. 235 f.

2) Fraenkel, II.

3) Vgl. Mengenlehre, S. 225 f., wo auf die besonderen Schwierigkeiten für den Unabhängigkeitsbeweis des Axioms der Auswahl hingewiesen wird.

4) Siehe Literaturverzeichnis zu Beginn dieser Arbeit.

5) Die Zitate beziehen sich auf die genannte Arbeit Tarskis.

hier üblichen Schreibweise $\mathfrak{S}\{A, B\}$) eine endliche Menge. (Theorème 6.) — Hieraus folgt, wenn man $A = \{a\}$ und $B = \{b\}$ setzt, insbesondere, daß das Paar $\{a, b\}$ endlich ist.

4) Ist A eine endliche Menge, so ist auch ihre Potenzmenge $\mathfrak{U}A$ endlich. (Theorème 19).

5) Ist A eine endliche Menge, deren sämtliche Elemente endliche Mengen sind, so ist auch die Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}A$ der Menge A endlich. (Theorème 20.)

6) Jede Teilmenge einer endlichen Menge ist endlich. (Theorème 8.)

Die von Tarski gegebenen Beweise benutzen sämtlich nur die ersten fünf Axiome Zermelos, also nicht das Axiom der Auswahl und das Axiom des Unendlichen. Nun ist nach den oben angeführten Sätzen klar, daß man, von einer endlichen Menge ausgehend, mit Hilfe der ersten sechs Axiome stets wieder zu endlichen Mengen gelangt. Bezüglich des Axioms der Auswahl folgt dies ja unmittelbar daraus, daß jede Auswahlmenge Teilmenge der Vereinigungsmenge ist. Nehmen wir also als Bereich der betrachteten Mengen die Nullmenge und die aus ihr mit den ersten sechs Axiomen hervorgehenden Mengen, so kommen wir stets nur zu solchen Mengen, die der obigen Definition der Endlichkeit genügen. Andrerseits genügt die auf Grund des Axioms des Unendlichen existierende Menge Z_0 offenbar nicht der gegebenen Definition. Denn z. B. enthält die von Fraenkel, IV, Nr. 47 als existierend nachgewiesene Menge Z' zu jedem Elemente r_m noch das Element r_{m^+}, das eine echte Teilmenge von r_m ist. Das Axiom VII ist daher in dem betrachteten Bereich nicht erfüllt, also von den übrigen unabhängig. Da der Beweis nicht die Existenz von Nichtmengen voraussetzt und leicht auf die verschärfte Form des Axioms der Aussonderung zu übertragen ist, ist er auch für das Fraenkelsche Axiomensystem gültig.

Man kann den Beweis natürlich auch auf Grund anderer Definitionen der Endlichkeit führen[1]). Auch auf Grund der bekannten Dedekindschen Definition[2]) ist dies z. B. möglich. Doch erfordert der Unabhängigkeitsbeweis gerade bei dieser Definition einen unverhältnismäßig großen Aufwand, indem sich die Heranziehung des Wohlordnungssatzes als anscheinend notwendig erweist,

1) Eine solche findet sich z. B. in Zermelos Arbeit: Les ensembles finis et le principe de l'induction complète. Acta Mathematica, 32, 1908. Andere Definitionen s. in der zitierten Arbeit von Tarski, wo auch Näheres über die Äquivalenz der verschiedenen Definitionen nachzulesen ist.

2) Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen, 4. Aufl., Braunschweig 1918.

und zwar zum Beweise des Satzes, daß die Potenzmenge einer im Sinne der Dedekindschen Definition endlichen Menge endlich ist, bezw. der Umkehrung, daß eine Menge unendlich ist, falls ihre Potenzmenge unendlich ist. Da die Vermeidung eines solchen Umweges nicht möglich war, wurde auf die Durchführung des Beweises auf dieser Grundlage verzichtet.

Aus der Unabhängigkeit des Axioms VII folgt sofort auch die Unabhängigkeit des Axioms VIIa, da nach VIIa jedenfalls die Menge Z_0 existiert[1]). Aber darüber hinaus ergibt sich noch die Unabhängigkeit des Axioms VIIa von dem übrigen Axiomen mit Einschluß des Axioms VII. Denn alle sieben Axiome sind ja in dem Bereiche $\mathfrak{R}$, den wir im § 1 des II. Kapitels untersucht haben, erfüllt. Das Axiom VIIa ist aber im Bereiche $\mathfrak{R}$ nicht erfüllt, denn in $\mathfrak{R}$ existiert z. B. nicht die Menge $\mathfrak{S}M$, wo $M = \{Z_0, Z_1, Z_2, \ldots\}$ ist[1]), während die Menge M und damit auch $\mathfrak{S}M$ auf Grund des Axioms VIIa existieren muß. Das erweiterte Axiom VIIa ist daher von den Axiomen I bis VII unabhängig.

Die Rolle, die das Ersetzungsaxiom VIII in der Zermeloschen bezw. Fraenkelschen Axiomatik zu spielen hat, scheint noch nicht genügend geklärt. Auf die Durchführung eines Unabhängigkeitsbeweises soll hier verzichtet werden. Nach einer Bemerkung des Herrn J. v. Neumann[2]) ist es zum Aufbau der Theorie der Ordnungszahlen erforderlich. Doch ist bisher dieses Gebiet der Mengenlehre noch nicht genügend weit auf axiomatischer Grundlage entwickelt, um Endgültiges darüber sagen zu können.

Für den Aufbau der allgemeinen Mengenlehre sind jedenfalls das Axiom der Potenzmenge und das Axiom der Aussonderung die wichtigsten. Denn während uns das erstere gestattet, von einer gegebenen, z. B. abzählbar unendlichen Menge zu immer umfassenderen und höhere Mächtigkeit besitzenden Mengen fortzuschreiten, gibt uns das Axiom der Aussonderung die Möglichkeit, aus den so gewonnenen Mengen die für die Zwecke der Mengenlehre erforderlichen Teilmengen zu bilden. Den Axiomen der Paarung und der Vereinigung kommt demgegenüber nur eine beschränkte Bedeutung zu; in weiten Gebieten der Mengenlehre können sie sogar vollkommen entbehrt werden.

---

1) Vgl. Kap. III, § 3.

2) J. v. Neumann, Zur Einführung der transfiniten Zahlen. Acta Litt. ac Scient. Reg. Univ. Hungaricae Franc.-Joseph. Sectio Scient. Math., Tom. I, Fasc. IV, 1923.

Lebenslauf.

Am 28. Februar 1899 wurde ich, Heinrich Vieler, als Sohn des Lehrers Heinrich Vieler und seiner Ehefrau Friederike geb. Überacker zu Boele, Kreis Hagen (Westf.), geboren. Ich bin evangelischer Konfession und preußischer Staatsangehöriger. Nachdem meine Eltern nach Hagen übergesiedelt waren, besuchte ich dort von Ostern 1909 ab das städtische Gymnasium, welches ich im Juni 1917 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Im Juli 1917 wurde ich zum Heeresdienste eingezogen. Nach meiner im Dezember 1918 erfolgten Entlassung begann ich im ersten Zwischensemester 1919 in Halle Mathematik, Physik und Chemie zu studieren. Finanzielle Gründe nötigten mich, nach fünf Semestern mein Studium zu unterbrechen. Nachdem ich in der Zwischenzeit in kaufmännischen Betrieben tätig gewesen war, konnte ich zu Beginn des Sommersemesters 1924 mein Studium an der Universität Marburg wieder aufnehmen.

Ich nahm an den Vorlesungen und Übungen der folgenden Herren Professoren und Dozenten teil:

In Halle: Bernstein, Eberhard, Gutzmer, Menzer, Mie, Schmidt, Vorländer und Ziehen;

in Marburg: von Auwers, Fraenkel, Hensel, Jaeck, Luckey, Neumann, Schäfer, Schenck, Schulze, Senftleben und Strecker.

Allen meinen sehr verehrten Lehrern spreche ich für die mannigfache Förderung meiner Studien, die ich durch sie erfahren habe, meinen wärmsten Dank aus, besonders aber Herrn Professor Dr. Fraenkel, der die Anregung zu der vorliegenden Arbeit gab und mir durch seinen Rat wertvollste Unterstützung zu geben wußte.